Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 3

УДК 533.7 *АЭРОДИНАМИКА*

Л. А. ПАЛЬЦЕВ

ОБ УРАВНЕНИЯХ ГАЗОДИНАМИКИ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

(Представлено академиком В. В. Струминским 30 XI 1972)

Известно ([1]), что в кинетической теории однокомпонентного классического газа функция распределения не зависит от градиента плотности. Однако в кинетической теории однокомпонентного низкотемпературного газа утверждается ([2]), что функция распределения Вигнера зависит от этого градиента, причем существует отличный от нуля вклад в поток энергии, пропорциональный градиенту плотности, что находится в противоречии с общими представлениями неравновесной статистической термодинамики ([3]). Ниже показано, что такое утверждение неверно и уравнения газодинамики умеренно плотного низкотемпературного газа в приближении Навье — Стокса имеют обычный вид.

1. Будем рассматривать умеренно плотный одноатомный газ при низких температурах, когда $r_0/\lambda \simeq 1$, где r_0 — радиус межмолекулярных сил и λ — тепловая длина волны де Бройля. Неравновесное состояние такого газа, с точностью до второго порядка по параметру разреженности $\varepsilon = nr_0^3$ (n — число молекул в единице объема), определяется ([4]) кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f(1)}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}_1}{m}\frac{\partial f(1)}{\partial \mathbf{r}}+\frac{\partial \mathbf{S}(1;f)}{\partial \mathbf{r}}+R(1;f)=J_2(1;f)+J_3(1;f); \tag{1}$$

здесь $f(i)=f(\mathbf{r},\mathbf{p}_i;t)$ — функция распределения Вигнера, нормированная на число молекул, $\mathbf{p}_i$ — импульс i-й молекулы,

$$J_2(1;f)=h^3\int d\mathbf{p}_1'\,d\mathbf{p}_2'\,d\mathbf{p}_2\,W(12;1'2')\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\{f(1')f(2')-f(1)f(2)\} \tag{2}$$

— локальный интеграл парных столкновений, $W(12;1'2')$ — вероятность перехода в единицу времени из состояния $(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)$ в состояние $(\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_2')$, определяемая с учетом тождественности молекул, $\mathbf{p}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2$;

$$J_3(1;f)=-2\pi i h^{-4}\int d\mathbf{p}_2\,d\mathbf{p}_3\,d\mathbf{q}\,.$$
$$\left\langle \mathbf{p}_1+\frac{\mathbf{q}}{2},\,\mathbf{p}_2,\,\mathbf{p}_3\right|\Big[\Phi(12);\,\Big\{\Omega_3(123)\,\Theta(\mathbf{r};3)\,\Omega_3^+(123)- \tag{3}$$
$$-\,\Omega_2(12)\Big(\sum_{j=1}^{2}\Omega_2(j3)\,\Theta(\mathbf{r};3)\,\Omega_2^+(j3)-\Theta(\mathbf{r};3)\Big)\,\Omega_2^+(12)\Big\}\Big]\left|\mathbf{p}_1-\frac{\mathbf{q}}{2},\,\mathbf{p}_2,\,\mathbf{p}_3\right\rangle$$

— локальный интеграл тройных столкновений, $\Omega_s(1\ldots s)=\Omega_s^{(+)}(1\ldots s)\times\gamma_s(1\ldots s)$, $\Omega_s^{(+)}(1\ldots s)$ — s-частичные операторы рассеяния Мёллера, γ_s — операторы симметризации, $\Phi(12)$ — потенциал взаимодействия молекул 1 и 2, $\Theta(\mathbf{r};3)=\hat\rho(\mathbf{r};1)\hat\rho(\mathbf{r};2)\hat\rho(\mathbf{r};3)$, одночастичные операторы $\hat\rho(\mathbf{r};j)$ в p-представлении определяются следующим образом:

$$\langle \mathbf{p}_j|\,\hat\rho(\mathbf{r};j)\,|\mathbf{p}_j'\rangle=h^3 f(\mathbf{r},\mathbf{p}_j;t)\,\delta(\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_j')$$

и $[\ldots;\ \ldots]$ — коммутатор;

$$S(1;f)=\int d\mathbf{p}_1' d\mathbf{p}_2'\,\omega_1(1;1'2')\,f(1')\,f(2'),$$

$$R(1;f)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i\neq j}^{2}(-1)^i\int d\mathbf{p}_1' d\mathbf{p}_2'\,\omega_2(1;1'2')\cdot\frac{\partial f(j')}{\partial\mathbf{r}}\,f(i') \tag{4}$$

— поправки первого порядка по пространственной неоднородности к локальному интегралу парных столкновений, где

$$\omega_j(1;1'2')=\frac{h^3}{2}\int d\mathbf{p}_2\,d\mathbf{q}\,\frac{\partial\delta(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}}\cdot\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_2')\times$$
$$\times\Big\{\Big\langle\mathbf{p}_{21}+\frac{\mathbf{q}}{2}(2-j)\,\Big|\,\hat t\,\Big|\,\mathbf{p}_{21}'+\frac{\mathbf{q}}{2}(j-1)\Big\rangle\Big\langle\mathbf{p}_{21}'-\frac{\mathbf{q}}{2}(j-1)\,\Big|\,\Omega_2^+\,\Big|\,\mathbf{p}_{21}-$$
$$-\frac{\mathbf{q}}{2}(2-j)\Big\rangle-\Big\langle\mathbf{p}_{21}+\frac{\mathbf{q}}{2}(2-j)\,\Big|\,\Omega_2\,\Big|\,\mathbf{p}_{21}'+\frac{\mathbf{q}}{2}(j-1)\Big\rangle\times$$
$$\times\Big\langle\mathbf{p}_{21}'-\frac{\mathbf{q}}{2}(j-1)\,\Big|\,\hat t^+\,\Big|\,\mathbf{p}_{21}-\frac{\mathbf{q}}{2}(2-j)\Big\rangle\Big\},$$

$\hat t=\Phi(12)\,\Omega_2(12)$ — t-оператор рассеяния, $j=1,2$.

Локальные газодинамические переменные: $\rho(\mathbf{r},t)$ — плотность, $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ — скорость и $e(\mathbf{r},t)$ — плотность внутренней энергии являются функционалами f вида

$$\rho(\mathbf{r},t)=m\int d\mathbf{p}_1\,f(1),\qquad \rho(\mathbf{r},t)\,\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\int d\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_1 f(1), \tag{5}$$
$$e(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2m}\int d\mathbf{p}_1\,\hat p_1^2 f(1)+\frac{h^3}{2}\int d\mathbf{p}_1\,d\mathbf{p}_2\langle\mathbf{p}_{21}\,|\,\Omega_2^+\hat t\,|\,\mathbf{p}_{21}\rangle f(1)\,f(2),$$

где $\hat{\mathbf{p}}_1=\mathbf{p}_1-m\mathbf{u}$ и плотность внутренней энергии записана только с учетом членов порядка ε [4], так как уравнение (1) позволяет определить вириальные поправки только с указанной точностью.

Из (1), учитывая (5), имеем систему уравнений переноса

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u^i}{\partial r^i}=0,\qquad \frac{\partial u^i}{\partial t}+u^j\frac{\partial u^i}{\partial r^j}=-\rho^{-1}\frac{\partial P^{ij}}{\partial r^j}, \tag{6}$$
$$\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial e u^i}{\partial r^i}=-\frac{\partial Q^i}{\partial r^i}-P^{ij}\frac{\partial u^j}{\partial r^i},\qquad i,j=1,2,3,$$

где тензор напряжений

$$P^{ij}(\mathbf{r},t)=\int d\mathbf{p}_1\,\frac{\hat p_1^i\hat p_1^j}{m}\,f(1)+\int d\mathbf{p}_1\,\hat p_1^i S^j(1;f) \tag{7}$$

и поток энергии

$$Q^i(\mathbf{r},t)=\int d\mathbf{p}_1\,\frac{\hat p_1^2\hat p_1^i}{2m^2}\,f(1)+\int d\mathbf{p}_1\,\frac{\hat p_1^2}{2m}\,S^i(1;f)+$$
$$+\frac{h^3}{4m}\int d\mathbf{p}_1\,d\mathbf{p}_2\,(\hat p_1^i+\hat p_2^i)\langle\mathbf{p}_{21}\,|\,\Omega_2^+\hat t\,|\,\mathbf{p}_{21}\rangle f(1)\,f(2). \tag{8}$$

Для определения тензора напряжения и потока энергии в газодинамическом приближении, когда число Кнудсена К мало, будем, следуя [5, 6], рассматривать решения уравнения (1) в виде

$$f=f_0+\mathrm{K}f_1+\ldots=f_0^{(0)}+\varepsilon f_0^{(1)}+\mathrm{K}f_1^{(0)}+\varepsilon\mathrm{K}f_1^{(1)}+\ldots, \tag{9}$$

где $f_j^{(i)}$ зависит от времени функциональным образом через локальные газодинамические переменные (5). Потребуем, чтобы коэффициенты разложения f в ряд по ε и К удовлетворяли следующим дополнительным условиям: ρ и $\mathbf{u}$ полностью определяются функцией $f_0^{(0)}$, а плотность внутренней энергии e — функциями $f_0^{(i)}$, $i = 0, 1$. Определим температуру $T(\mathbf{r}, t)$ через $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $e(\mathbf{r}, t)$ так же, как и в статистическом равновесии, т. е. с точностью до членов порядка ε:

$$e = nkT\left(^3/_2 - nT\, dB(T) / dT\right), \quad n = \rho / m, \tag{10}$$

где второй вириальный коэффициент [7]

$$B(T) = -\frac{1}{2}\left(\frac{h^2\beta}{\pi m}\right)^{3/2} \int d\mathbf{p}_{21} \langle \mathbf{p}_{21} | \{\gamma_2 \exp(-\beta\hat{H}) - \exp(-\beta\hat{k})\} | \mathbf{p}_{21}\rangle; \tag{11}$$

$\hat{H}$ и $\hat{K}$ — операторы полной и кинетической энергии молекул 1 и 2 в системе их центра масс, $\beta = (kT)^{-1}$.

Тогда дополнительные условия для функций $f_0^{(i)}$, связанные с однозначным определением e, имеют вид

$$\frac{3}{2} nkT = \int d\mathbf{p}_1 \frac{\hat{p}_1^2}{2m} f_0^{(0)}(1),$$

$$-n^2kT^2 \frac{dB(T)}{dT} = \int d\mathbf{p}_1 \frac{\hat{p}_1^2}{2m} f_0^{(1)}(1) + \frac{h^3}{2} \int d\mathbf{p}_1\, d\mathbf{p}_2 \langle \mathbf{p}_{21} | \Omega_2^+ \hat{t} | \mathbf{p}_{21}\rangle f_0^{(0)}(1) f_0^{(0)}(2).$$

2. В нулевом приближении по K функция распределения Вигнера определяется из уравнений

$$J_2(1; f_0^{(0)}) = 0, \quad I_2(1 | f_0^{(0)}; \Psi_0^{(1)}) = -J_3(1; f_0^{(0)}), \tag{12}$$

где $\quad f_0^{(1)} = f_0^{(0)} \Psi_0^{(1)}$, и

$$I_2(1 | f; A) = h^3 \int d\mathbf{p}_1' \, d\mathbf{p}_2' \, d\mathbf{p}_2 W(12; 1'2') \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_2') \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{2} \{f(1') f(2') A(j') - f(1) f(2) A(j)\}. \tag{13}$$

Решение первого уравнения системы (12) с учетом дополнительных условий, как известно, имеет вид

$$f_0^{(0)}(1) = f_M(1) = \frac{\rho}{m}\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2} \exp\left(-\beta \frac{\hat{p}_1^2}{2m}\right). \tag{14}$$

Подставляя (14) в локальный интеграл тройных столкновений (3), получим

$$J_3(1; f_M) = -I_2(1 | f_M; g), \tag{15}$$

где $I_2(1 | f_M; g)$ определяется в (13) при замене A на g,

$$g(1) f_M(1) = n^2 \left(\frac{\beta h}{2\pi m}\right)^3 \int d\mathbf{p}_2 \exp\left\{-\beta \frac{(\hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2)^2}{4m}\right\} \times$$

$$\times \langle \mathbf{p}_{21} | \{\gamma_2 \exp(-\beta\hat{H}) - \exp(-\beta\hat{K})\} | \mathbf{p}_{21}\rangle. \tag{16}$$

Как следует из (15) и (16), интеграл тройных столкновений в локально-равновесном приближении отличен от нуля, что связано с некоммутативностью операторов $\hat{H}$ и $\hat{K}$.

Учитывая (15), второе уравнение системы уравнений (12) можно представить в виде

$$I_2(1 | f_M; [\Psi_0^{(1)} - g]) = 0. \tag{17}$$

Общее решение уравнения (17) является линейной функцией инвариантов столкновения: 1, $\mathbf{p}_1$ и $\frac{1}{2m} p_1^2$. Учитывая дополнительные условия, в первом приближении по ε получим

$$f_0^{(1)}(1) = f_M(1)\,[g(1) + 2nB(T)], \tag{18}$$

где $B(T)$ и $g(1)$ определяются соотношениями (11) и (16).

Подставляя в (7) и (8) выражения для f_M и $f_0^{(1)}$, определяемые в (14) и (18), для тензора напряжений и потока энергии в нулевом приближении по К получим следующие выражения:

$$Q^i = 0, \quad P^{ij} = \delta_{ij}P, \quad P = nkT(1 + nB(T)). \tag{19}$$

3. В первом приближении по К функция распределения Вигнера определяется из уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_0}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u^i}{\partial r^i} - \frac{\hat{p}_1^i}{m}\frac{\partial \rho}{\partial r^i}\right) + \frac{\partial f_0}{\partial u^i}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r^i} - \frac{\hat{p}_1^j}{m}\frac{\partial u^i}{\partial r^j}\right) + \\ + \frac{\partial f_0}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\rho^{-1}\left\{\rho\left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_T + P\right\}\frac{\partial u^i}{\partial r^i} - \frac{\hat{p}_1^i}{m}\frac{\partial T}{\partial r^i}\right] - \\ - \frac{\partial S^i(1; f_0)}{\partial r^i} - R(1; f_0) = -I_2(1\,|\,f_0; \Psi_1) - I_3(1\,|\,f_0; \Psi_1),\end{gathered} \tag{20}$$

где $f_1 = f_0\Psi_1$, $I_3(1|f_0; \Psi_1)$ — интеграл тройных столкновений (3) в линейном по Ψ_1 приближении и P определяется в (19).

Учитывая (4), зависящий от градиента плотности член в левой части уравнения (20) можно представить в виде

$$\left\{\hat{p}_1^i\frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial \rho} - 2\frac{kT}{m}B(T)\frac{\partial f_M}{\partial r^i} - \frac{kT}{\rho}\frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u^i} + \frac{2m}{\rho}S^i(1; f_M)\right\}\frac{\partial \rho}{\partial r^i}. \tag{21}$$

Подставляя в (21) выражения для f_M, $f_0^{(1)}$, $B(T)$ и $S^i(1; f_M)$, получим, что коэффициент перед градиентом плотности равен нулю.

Следовательно, функция распределения Вигнера в первом приближении по К не зависит от градиента плотности и, как легко видеть из (20), является линейной функцией тензора скоростей деформации и градиента температуры, что согласуется с ([3]).

В работе ([2]) при выводе уравнений газодинамики использовали кинетическое уравнение, которое следует из (1), если пренебречь интегралом тройных столкновений и тождественностью молекул. Однако такое уравнение (см. также ([8])) не сохраняет полную энергию с учетом первой вириальной поправки. Это можно показать, учитывая, что $R(1; f)$ только в сумме с интегралом тройных столкновений $J_3(1; f)$ определяет перенос энергии межмолекулярного взаимодействия. Кроме того, интеграл тройных столкновений, имеющий порядок ε, в локально-равновесном приближении (15) отличен от нуля и поэтому локально-равновесная функция, определенная из этого уравнения (при тех же дополнительных условиях), в первом приближении по ε является неправильной, что и приводит в ([2]) к зависимости потока энергии в однокомпонентных газах от градиента плотности.

В заключение автор выражает благодарность акад. В. В. Струминскому и Д. Н. Зубареву за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

Московский физико-технический институт
г. Долгопрудный Московской обл.

Поступило
25 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. S. Garcia-Colin, M. S. Green, F. Chaos, Physica, 32, 450 (1966). [2] S. Imam-Rahajoe, G. F. Curtiss, J. Chem. Phys., 47, 5269 (1967). [3] Д. Н. Зубарев, Неравновесная статистическая термодинамика, «Наука», 1971. [4] Л. А. Пальцев, Теоретич. и матем. физ., 11, 259 (1972). [5] Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, М.— Л., 1946. [6] В. В. Струминский, ДАН, 158, 298 (1964). [7] T. Yokota, J. Phys. Soc. Japan, 15, 779 (1960). [8] M. W. Thomas, R. F. Snider, J. Stat. Phys., 2, 61 (1970).