Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 5

УДК 518.25 **МАТЕМАТИКА**

Л. А. БУНИМОВИЧ

ОБ ЭРГОДИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ БИЛЬЯРДОВ, БЛИЗКИХ К РАССЕИВАЮЩИМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1972)

1. Пусть Q — замкнутая область на эвклидовой плоскости R^2 (в этом случае Q предполагается также ограниченной) или на двумерном торе T^2 с эвклидовой метрикой, граница ∂Q которой состоит из конечного числа гладких (класса C^3) кривых, причем кривизна в каждой точке такой кривой отлична от нуля. Мы считаем край ∂Q оснащенным полем внутренних (по отношению к Q) нормалей $n(q)$.

Обозначим через ∂Q^+ объединение всех таких гладких компонент края ∂Q, кривизна каждой из которых положительна (при выбранном нами оснащении края). В дальнейшем мы будем называть ∂Q^+ рассеивающей частью границы ∂Q. Аналогично ∂Q^- есть объединение всех таких кривых $\hat\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \hat\Gamma_l$, кривизна каждой из которых отрицательна. ∂Q^- назовем фокусирующей частью границы ∂Q.

Рассмотрим бильярд (см. [1]) внутри области Q. Фазовым пространством бильярда служит пространство линейных элементов M. Естественную проекцию M на Q обозначим через π. Однопараметрическую группу сдвигов вдоль траекторий бильярда обозначим $\{S_t\}$. Она сохраняет естественную меру μ в M (см. [1, 2]), следовательно, $\{S_t\}$ есть поток в смысле эргодической теории.

Положим $M_1^+ = \{x\colon (x, n(q)) \leqslant 0,\ q \in \partial Q^+,\ q = \pi(x)\}$, соответственно $M_1^- = \{x\colon (x, n(q)) < 0,\ q \in \partial Q^-,\ q = \pi(x)\}$. Обозначим $M_1 = M_1^+ \cup M_1^-$ и пусть $\tau(x)$ — ближайший отрицательный момент отражения от края траекторией точки x. Легко видеть, что $\tau(x) > -\infty$ и при всяком $x \in M_1$ определено преобразование $Tx = S_{\tau(x)-0}x \in M_1$. Преобразование T служит производным автоморфизмом потока $\{S_t\}$ (см. [1, 3]).

2. В отличие от рассеивающих бильярдов (см. [1]) в рассматриваемом нами случае функция $\tau(x)$ не ограничена по модулю снизу. Она не ограничена по модулю снизу, во-первых, в окрестности угловых точек границы (т. е. таких точек $\tilde q_1, \tilde q_2, \ldots, q_r$, которые являются точками пересечения регулярных компонент границы ∂Q^+) и, во-вторых, при отражениях от фокусирующей части границы ∂Q^-.

Если область Q лежит на торе T^2, то функция $\tau(x)$ также может быть не ограничена по модулю сверху. Она не ограничена по модулю сверху в окрестности замкнутых траекторий, все время касающихся границы ∂Q, причем ∂Q лежит в точках касания по одну сторону от траектории. Число таких траекторий конечно.

Определение. Область Q удовлетворяет условию (P), если:

1) кривизна каждой компоненты $\hat\Gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, фокусирующей части границы ∂Q^- постоянна, т. е. $\hat\Gamma_i$ является дугой некоторой окружности $O_{\hat\Gamma_i}$;

2) окружности $O_{\hat\Gamma_i}$ и $O_{\hat\Gamma_j}$ не пересекаются при $i \neq j$;

3) для всех $\hat\Gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, дуга $O_{\hat\Gamma_i} \setminus \hat\Gamma_i$, дополняющая $\hat\Gamma_i$ до целой окружности $O_{\hat\Gamma_i}$, целиком лежит внутри Q.

Области, для которых выполнено условие (P), можно рассматривать, в некотором смысле, как «малые возмущения» областей со строго выпуклым внутрь краем, бильярды внутри которых были изучены в ([4]).

Имеет место следующая основная

Теорема 1. *Если область Q удовлетворяет условию (P) и рассеивающие компоненты границы ∂Q пересекаются трансверсально, то бильярд внутри Q является K-системой.*

3. Путь к доказательству этой теоремы, как обычно, лежит через построение трансверсальных слоев для потока $\{S_t\}$ и исследование их эргодических свойств.

Пусть моменты последовательного отражения от края траекторией точки $x \in M_1$ суть $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots$ Обозначим $k_i(x)$ кривизну края в точке i-го отражения, $\varphi_i(x)$ — угол падения при i-м отражении, $\pi / 2 \leqslant \varphi_i(x) \leqslant 3\pi / 2$, $\tau_i = t_i - t_{i-1}$. Рассмотрим бесконечную цепную дробь

$$\varkappa_+^{(c)}(x) = 2\frac{k_0(x)}{\cos\varphi_0(x)} + \cfrac{1}{-\tau_1 + \cfrac{1}{2\dfrac{k_1(x)}{\cos\varphi_1(x)} + \cfrac{1}{-\tau_2 + \cfrac{1}{2\dfrac{k_2(x)}{\cos\varphi_2(x)} + \ddots}}}} \tag{1}$$

Лемма 1. *Отрезок цепной дроби* (1), *соответствующий серии из n идущих подряд отражений траекторией точки x от одной и той же фокусирующей компоненты $\hat{\Gamma}_i$, имеет вид*

$$\frac{4}{\tau} + \cfrac{1}{-\tau + \cfrac{1}{\dfrac{4}{\tau} + \cfrac{1}{-\tau + \cfrac{1}{\dfrac{4}{\tau} + \ddots + \cfrac{1}{-\tau + \cfrac{1}{\dfrac{4}{\tau}}}}}}}, \tag{2}$$

где τ — промежуток времени между двумя последовательными отражениями от $\hat{\Gamma}_i$ и цепная дробь имеет $2n + 1$ членов.

Действительно, кривизна компоненты $\hat{\Gamma}_i$ постоянна и равна $k^{(i)} < 0$. Отсюда и из закона отражения следует, что углы падения при всех отражениях из этой серии одинаковы и равны φ. Поэтому совпадают промежутки времени между каждыми двумя последовательными отражениями. Равенство $2\dfrac{k^{(i)}}{\cos\varphi} = \dfrac{4}{\tau}$ легко вытекает из изложенного выше.

Лемма 2. *Для любой точки $x \in M_1$ цепная дробь* (1) *сходится.*

Доказательство этого утверждения вытекает из леммы 1, основных рекуррентных соотношений для цепных дробей и из теоремы Зейделя — Штерне (см. ([5])).

Рассмотрим такой пучок траекторий, кривизна которого в любой его точке $x \in M_1$ равна $\varkappa_+^{(c)}(x)$. Из определения M_1 вытекает, что $\varkappa_+^{(c)}(x)$ есть кривизна пучка (в точке x) в момент после отражения от края ∂Q. Тогда кривизна (в точке с тем же носителем) этого пучка в момент перед отражением от края равна (см. ([1], [4]))

$$\varkappa_-^{(c)}(x) = \varkappa_+^{(c)}(x) - 2\frac{k_0(x)}{\cos\varphi_0(x)}.$$

Пучок траекторий с отрицательной кривизной будем называть расходящимся, а пучок с положительной кривизной — сходящимся.

Справедлива следующая основная

Лемма 3. *Пусть на произвольную компоненту $\hat{\Gamma}_i$ фокусирующей части границы ∂Q^- падает пучок траекторий нулевой кривизны, который имеет n подряд идущих отражений от $\hat{\Gamma}_i$.*

Тогда для любого линейного элемента x из этого пучка и для любого числа m, $1 \leqslant m \leqslant n$, справедливы следующие неравенства: $\varkappa_-^{(c)}(T^m x_0) < 0$, $\varkappa_+^{(c)}(T^m x_0) > 0$, $\varkappa_+^{(c)}(T^{m-1}x_0) > |\varkappa_-^{(c)}(T^m x_0)|$, *причем*

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \frac{\varkappa_+^{(c)}(T^{m-1}x_0)}{|\varkappa_-^{(c)}(T^m x_0)|} = 1, \quad x_0 = S_{\tau(x)-0}x \in M_1.$$

Таким образом, основная лемма утверждает, что между любыми двумя последовательными отражениями от $\hat{\Gamma}_i$ рассматриваемый пучок проходит через сопряженную точку и испытывает расширение, причем коэффициент расширения стремится к единице вместе с номером отражения в серии.

Доказательство этого утверждения проводится по той же схеме, по которой обычно доказывается уже упоминавшаяся теорема Зейделя — Штерне. При этом существенно используется результат леммы 1, позволяющей оценить при помощи рекуррентных соотношений величины подходящих дробей для цепной дроби (1).

Легко доказывается (см. ([4])) следующая

Лемма 4. *Если рассеивающие компоненты границы ∂Q^+ пересекаются трансверсально, то найдется такая константа L, что для любой угловой точки $\tilde{q}$ найдется окрестность $U_{\tilde{q}}$ такая, что любой отрезок траектории, целиком лежащий внутри $U_{\tilde{q}}$, имеет не более чем L отражений от края.*

Из лемм 1—4, леммы Бореля — Кантелли (см. ([6])) и теоремы 3.1 из работы ([1]) вытекает

Теорема 2. *Для почти каждой точки $x_0 \in M_1$ существует кривая γ класса C^1, проходящая через точку x_0 и принадлежащая локальному сжимающемуся трансверсальному слою точки x_0, заданная уравнением $\varphi = \varphi(r)$, причем*

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\varkappa_+^{(c)}(x(r, \varphi))\cos\varphi + k(x),$$

где r — параметр длины дуги на ∂Q.

Слои расширяющегося трансверсального слоения для автоморфизма T строятся аналогично. Построенные трансверсальные слоения абсолютно непрерывны (см. ([2])). Доказательство этого утверждения такое же, как и для рассеивающих бильярдов (см. ([1])).

Далее для рассматриваемых динамических систем по той же схеме, что и в ([4]), доказывается утверждение, аналогичное «основной теореме теории рассеивающих бильярдов».

Отсюда стандартными методами (см. ([1])) выводится утверждение теоремы 1.

Автор благодарен Я. Г. Синаю за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Г. Синай, УМН, 25, 2, 141 (1970). [2] Д. В. Аносов, Я. Г. Синай, УМН, 22, 5, 107 (1967). [3] В. А. Рохлин, УМН, 4, 2, 57 (1949). [4] Л. А. Бунимович, Я. Г. Синай, Матем. сборн., **90(132)**, 3, 414 (1973). [5] А. Н. Хованский, Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа, М., 1956. [6] И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, «Наука», 1965.