Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 5

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

В. М. БЫКОВ

О ЗАМКНУТЫХ ПОКРЫТИЯХ МНОГООБРАЗИЙ И ЗАЦЕПЛЕНИИ ЦИКЛОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 13 XII 1972)

Пусть X — локально-компактное пространство, $\mathcal{G}$ — пучок K-модулей над X, где K — коммутативное кольцо с единицей. Для замкнутого подпространства $Y \subset X$ положим $H_c^*(Y) = H_c^*(Y; \mathcal{G}|Y)$. Если $h \in H_c^m(X)$, то $h|Y \in H_c^m(Y)$ будет обозначать образ h при отображении, индуцированном вложением $Y \subset X$.

Теорема 1. *Пусть m, l — целые числа, $m \geqslant l \geqslant 1$. Пусть $\mathfrak{A} = \{A_\alpha: \alpha \in I\}$ — локально-конечное семейство замкнутых подпространств X, кратность которого не превосходит l. Предположим, что для всех s, $0 < s < l$, и для любого набора из s неповторяющихся индексов $\{\alpha_j \in I: j = 1, \ldots, s\}$ выполнено условие $H_c^{m-s}(\bigcap_{j=1}^{s} A_{\alpha_j}) = 0$. Обозначим $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Тогда для любого ненулевого $h \in H_c^m(A)$ существуют индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, $q \leqslant l$, такие, что $h|\bigcup_{j=1}^{q} A_{\alpha_j} \neq 0$.*

Нам потребуется принцип минимальности в следующей специальной формулировке.

Лемма 1. *Для любого ненулевого $h \in H_c^m(A)$ множество подпространств пространства A вида $F_J = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$, $J \subset I$, таких, что $h|F_J \in H_c^m(F_J)$ отличен от нуля, упорядоченное по включению индексов, имеет минимальный элемент.*

Доказательство. Так как семейство $\mathfrak{A}$ локально-конечно, то все подпространства F_J замкнуты и все вложения этих подпространств являются собственными. Из непрерывности когомологий ([3]) следует, что в множестве всех F_J, для которых $h|F_J \neq 0$, каждое линейно упорядоченное подмножество ограничено снизу и можно применить лемму Цорна.

Доказательство теоремы 1. Индукция по l. При $l = 1$ каждое A_α открыто в A, откуда $H_c^*(A) = \sum_{\alpha \in I} H_c^*(A_\alpha)$ и ненулевой элемент $h \in H_c^m(A)$ имеет ненулевую координату.

Пусть $l > 1$ и теорема доказана с заменой l на $l-1$. Пусть $h \in H_c^m(A)$ — ненулевой класс когомологий и $F_J = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ — минимальное (в смысле включения индексов) подпространство A такое, что $h|F_J \neq 0$. Покажем, что множество J имеет не более l элементов. Выберем произвольно $\beta \in J$. Если $J = \{\beta\}$, все доказано. Если $J \neq \{\beta\}$, рассмотрим аддиционную последовательность

$$H_c^{m-1}\Bigl(\bigcup_{\alpha \in J \setminus \{\beta\}} (A_\alpha \cap A_\beta)\Bigr) \xrightarrow{\Delta} H_c^m(F_J) \xrightarrow{\varphi} H_c^m\Bigl(\bigcup_{\alpha \in J \setminus \{\beta\}} A_\alpha\Bigr) \oplus H_c^m(A_\beta).$$

Так как F_J минимально, то $\varphi(h|F_J) = h|\bigcup_{\alpha \in J \setminus \{\beta\}} A_\alpha + h|A_\beta = 0$ и найдется $h_1 \in H_c^{m-1}(\bigcup_{\alpha \in J \setminus \{\beta\}} (A_\alpha \cap A_\beta))$ такой, что $\Delta h_1 = h|F_J$. Семейство множеств $\mathfrak{A}_1 = \{A_\alpha \cap A_\beta\colon \alpha \in J \setminus \{\beta\}\}$ удовлетворяет предположениям теоремы с m и l, уменьшенными на 1, поэтому существуют индексы $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_{q-1} \in J \setminus \{\beta\}$, $q \leqslant l$, такие, что $h_1 \mid \bigcup\limits_{j=1}^{q-1} (A_{\alpha_j} \cap A_\beta) \neq 0$.

Положим $\alpha_q = \beta$ и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & H_c^{m-1}\Big(\bigcup\limits_{\alpha \in J\setminus\{\beta\}} (A_\alpha \cap A_\beta)\Big) & \xrightarrow{\Delta} & H_c^m(F_J) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ H_c^{m-1}\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{q-1} A_{\alpha_j}\Big) \oplus H_c^{m-1}(A_{\alpha_q}) & \to & H_c^{m-1}\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{q-1} (A_{\alpha_j} \cap A_{\alpha_q})\Big) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_c^m\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{q} A_{\alpha_j}\Big), \end{array}$$

нижняя строка которой точна, а вертикальные отображения индуцированы вложениями. По предположению, $H_c^{m-1}(A_{\alpha_q}) = 0$. Если $H_c^{m-1}\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{q-1} A_{\alpha_j}\Big) = 0$, то Δ_1 — мономорфизм, и тогда

$$h \mid \bigcup_{j=1}^{q} A_{\alpha_j} = (\Delta h_1) \mid \bigcup_{j=1}^{q} A_{\alpha_j} = \Delta_1\Big(h_1 \mid \bigcup_{j=1}^{q-1} (A_{\alpha_j} \cap A_{\alpha_q})\Big) \neq 0,$$

и из минимальности F_J следует, что $J = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$, $q \leqslant l$.

Осталось только показать, что $H_c^{m-1}\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{q-1} A_{\alpha_j}\Big) = 0$. Поскольку $q - 1 < l$, достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть в условиях теоремы 1 множество I состоит из $N < l$ элементов. Тогда $H_c^{m-1}(A) = 0$.*

Доказательство. Будем считать, что $I = \{1, \ldots, N\}$ и проведем индукцию по N. При $N = 1$ утверждение леммы тривиально. Пусть $N > 1$ и лемма доказана для $N - 1$. Рассмотрим аддиционную последовательность

$$H_c^{m-2}\Big(\bigcup_{j=1}^{N-1} (A_j \cap A_N)\Big) \to H_c^{m-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{N} A_j\Big) \to H_c^{m-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{N-1} A_j\Big) \oplus H_c^{m-1}(A_N). \qquad (1)$$

Имеем $H_c^{m-1}(A_N) = 0$ и $H_c^{m-1}\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{N-1} A_j\Big) = 0$ по предположению индукции. Семейство множеств $\mathfrak{A}_1 = \{A_j \cap A_N\colon j = 1, \ldots, N-1\}$ удовлетворяет предположениям леммы с m, l и N, уменьшенными на 1, поэтому $H_c^{m-2}\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{N-1} (A_j \cap A_N)\Big) = 0$. Из точности последовательности (1) следует $H_c^{m-1}\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{N} A_j\Big) = 0$, и лемма доказана.

Замечание 1. Локальная компактность X использовалась только при доказательстве леммы 1. Поэтому для конечных семейств $\mathfrak{A}$ требование локальной компактности X можно отбросить. При этом когомологии с компактными носителями можно заменить на когомологии с произвольными замкнутыми носителями.

Замечание 2. Прямого аналога для гомологий теорема 1 не имеет.

Следствие 1. *Пусть K — кольцо главных идеалов, M — связное ориентируемое обобщенное m-многообразие над K в смысле Бореля* ([6]). *Пусть $\mathfrak{A} = \{A_\alpha\colon \alpha \in I\}$ — замкнутое локально-конечное покрытие M кратности, не превосходящей l, $1 \leqslant l \leqslant m$, и пересечения по s множеств A_α*

имеют тривиальные когомологии с компактными носителями в размерности $m-s$ при $0<s<l$.

Тогда из $\mathfrak{A}$ можно выделить покрытие, состоящее не более чем из l множеств.

Доказательство. Применив к элементу $1 \in H_c{}^m(M) = K$ теорему 1, найдем $q \leqslant l$ множеств $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_q}$ таких, что $1 \mid \bigcup_{j=1}^{q} A_{\alpha_j} \neq 0$. Тогда $\bigcup_{j=1}^{q} A_{\alpha_j} = M$, так как в противном случае $H_c^m(\bigcup_{j=1}^{q} A_{\alpha_j}) = 0$ (см. ([6])).

При $l=2$ получаем

Следствие 2. *Пусть $m \geqslant 2$, $\mathfrak{A} = \{A_\alpha: \alpha \in I\}$ — локально-конечное покрытие связного ориентируемого обобщенного m-многообразия, по меньшей мере, тремя замкнутыми множествами, ни одно из которых нельзя отбросить, и пусть $H_c{}^{m-1}(A_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in I$.*

Тогда кратность $\mathfrak{A}$ не может быть меньше трех.

Это следствие можно рассматривать как обобщение на некомпактные многообразия и бесконечные покрытия свойств $A-C$ замкнутых покрытий многообразий из ([2]). Условие локальной конечности отбросить нельзя, как показывает пример покрытия одноточечными множествами и пример счетного покрытия S^m шарами в ([2]).

Следствие 3. *Пусть M — связное ориентируемое обобщенное $(m+ +1)$-многообразие с $H_c{}^m(M) = 0$. Пусть семейство $\mathfrak{A} = \{A_\alpha: \alpha \in I\}$ подпространств M удовлетворяет предположениям теоремы 1 и пусть $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ разделяет M.*

Тогда объединение некоторых l множеств A_α разделяет M (ср. со следствием 1.1 в ([1])).

Доказательство. $M \setminus A$ несвязно тогда и только тогда, когда гомоморфизм $H_c^{m+1}(M \setminus A) \to H_c^{m+1}(M)$ имеет нетривиальное ядро ([6]). Из точной последовательности пары (M, A) следует, что ненулевой элемент этого ядра накрывается элементом $h \in H_c{}^m(A)$. Применив к нему теорему 1, получим $h \mid \bigcup_{j=1}^{q} A_{\alpha_j} \neq 0$ для некоторых $\alpha_j \in I$ и $q \leqslant l$. Тогда из точной последовательности пары $(M, \bigcup_{j=1}^{q} A_{\alpha_j})$ следует, что ядро отображения $H_c^{m+1}(M \setminus \bigcup_{j=1}^{q} A_{\alpha_j}) \to H_c^{m+1}(M)$ снова нетривиально.

Пусть G — модуль над коммутативным кольцом K с единицей. Рассмотрим теорию гомологий $H_*{}^c(X; G)$, определенную в ([4], [5]).

Определение. Пусть A — замкнутое подпространство локально-компактного пространства X. Говорят, что ненулевой элемент $h \in H_r{}^c(X \setminus \setminus A; G)$ зацепляет множество A, если его образ в $H_r{}^c(X; G)$ равен нулю.

Пусть теперь X — обобщенное n-многообразие над G в смысле Скляренко ([4]) (например, многообразие в смысле Бореля ([6]), если $G=K$ — кольцо главных идеалов). Для локально-замкнутого подпространства $Y \subset \subset X$ положим $H_*{}^c(Y) = H_*{}^c(Y; G)$; «ориентирующий» пучок $\mathscr{H}_n(G)$ над X ([4]) обозначим через $\mathscr{H}_n$. Тогда теорема 1 дает следующий результат о зацеплении циклов.

Теорема 2. *Пусть n, l, r — целые числа, $n > l \geqslant 1$, $n-l > r \geqslant 0$, и X — обобщенное n-многообразие с $H_{r+1}^c(X) = 0$.*

Пусть $\mathfrak{A} = \{A_\alpha: \alpha \in I\}$ — локально-конечное семейство замкнутых подпространств X, кратность которого не превосходит l. Предположим, что для всех s, $0<s<l$, и для любого набора из s неповторяющихся индексов $\{\alpha_j \in I: j = 1, \ldots, s\}$ выполнено условие $H_c^{n-r-s-1}(\bigcap_{j=1}^{s} A_{\alpha_j}; \mathscr{H}_n) = 0$.

Если множество $A = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ *зацеплено элементом* $h \in H_r^c(X \setminus A)$, *то существуют индексы* $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, $q \leqslant l$, *такие, что* i_*h *зацепляет* $\bigcup_{j=1}^{q} A_{\alpha_j}$, *где* i: $X \setminus \bigcup_{j=1}^{q} A_{\alpha_j} \to X \setminus A$ — *вложение.*

Доказательство. При помощи двойственности Пуанкаре ([4]) и условия $H_{r+1}^c(X) = 0$ классы гомологий размерности r, зацепляющие $\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$, $J \subset I$, отождествляются с ненулевыми элементами из $H_c^{n-r-1}(\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha; \mathscr{H}_n)$. Применяя к ним теорему 1 с $m = n - r - 1$ и проводя обратные отождествления, получаем утверждение теоремы 2.

Этот результат обобщает теорему 1.1 из ([1]). Там же показано, что ни одно из условий теоремы 2 нельзя отбросить. Эти условия очень сильны. Так, если потребовать ацикличность пересечений множеств A_α во всех размерностях, то ненулевых классов когомологий и гомологий, фигурирующих в теоремах 1 и 2, не существует. Для компактного A это следует из рассмотрения спектральной последовательности покрытия $\mathfrak{A}$ пространства A ([7]).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. L. Wilder, Proc. Nat. Acad. Sci. P.S.A., 54, № 3, 683 (1965). [2] R. L. Wilder, Michigan Math. J., 13, № 1, 49 (1966). [3] G. E. Bredon, Sheaf Theory, N.Y., 1967. [4] Е. Г. Скляренко, ИАН, сер. матем., 5, № 4, 831 (1971). [5] Е. Г. Скляренко, УМН, 24, в. 5, 87 (1969). [6] A. Borel, Ann. Math. Studies, № 46 (1960). [7] Р. Годеман, Алгебраическая топология и теория пучков, ИЛ, 1961.