Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 5

УДК 519.46 МАТЕМАТИКА

Л. И. ВАЙНЕРМАН, Г. И. КАЦ

НЕУНИМОДУЛЯРНЫЕ КОЛЬЦЕВЫЕ ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ХОПФА — ФОН НЕЙМАНА

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 13 XI 1972)

1. Унимодулярные кольцевые группы были введены в ([1]) как класс объектов, содержащий, в частности, унимодулярные группы и двойственные им объекты. В этом классе имеет место принцип двойственности, обобщающий классический принцип двойственности Л. С. Понтрягина локально-компактных коммутативных групп. В настоящей работе вводится более широкий класс кольцевых групп (неунимодулярные кольцевые группы), играющий аналогичную роль для произвольных локально-компактных групп (возможно, неунимодулярных). Далее под кольцевыми группами (к.г.) понимаются неунимодулярные к.г. Общий характер определения к. г. и метод установления принципа двойственности остается тем же, что и в ([1]). Основным аппаратом работы ([1]) являются следы на неймановских алгебрах и гильбертовы алгебры. В настоящей работе аналогичную роль играют веса и модулярные гильбертовы алгебры. Необходимые технические сведения заимствованы нами из работ ([2–5]).

2. Определение кольцевой группы. $\mathcal{U}$ — обобщенная левая гильбертова алгебра, $\mathcal{H}$ — соответствующее гильбертово пространство. Каждый элемент $a \in \mathcal{U}$ определяет ограниченный оператор $\pi(a)$: $x \to ax$ в $\mathcal{H}$. Алгебра операторов $\pi(\mathcal{U})$ порождает левую неймановскую алгебру $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ алгебры $\mathcal{U}$. На ней естественным образом определен канонический вес ρ и группа модулярных автоморфизмов σ_t, $-\infty < t < \infty$. Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — неймановская алгебра операторов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и μ — фиксированный вес алгебры $\mathfrak{A}$.

Обозначим через $\mathfrak{N}_\mu$ левый идеал алгебры $\mathfrak{A}$, состоящий из операторов A, для которых $\mu(A^*A) < \infty$. Используя результаты Комба (([5]), 2.11, 2.13), можно показать, что если вес μ удовлетворяет некоторым условиям (назовем такой вес стандартным), то операторы из $\mathfrak{N}_\mu \cap \mathfrak{N}_\mu^*$, снабженные скалярным произведением $(A, B) = \mu(B^*A)$, образуют совершенную левую обобщенную гильбертову алгебру $\mathfrak{U}$, причем соответствие $\pi(A) \to A$, $A \in \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{A}$, продолжается однозначно до изоморфизма неймановских алгебр $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathfrak{H}_\mu$ гильбертово пространство, являющееся пополнением $\mathfrak{U}$. В силу упомянутого изоморфизма канонический вес на $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ переходит в вес μ и на $\mathfrak{A}$ переносится группа модулярных автоморфизмов σ_t. С помощью этого изоморфизма можно также определить на $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ стандартный вес $\mu \otimes \mu$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ совершенную модулярную гильбертову алгебру, ассоциированную с алгеброй $\underline{\mathfrak{U}}$ (([5]), 2.8), через ∇ — соответствующий модулярный оператор, а через $\underline{*}$ — инволюцию, сопряженную к $*$.

Известно, что неймановская алгебра $\mathfrak{A}$, рассматриваемая как банахово пространство, является сопряженным к некоторому банаховому пространству $\mathfrak{A}_*$. Обозначим через $\langle A, f\rangle$, $A \in \mathfrak{A}$, $f \in \mathfrak{A}_*$, соответствующую двойственность.

Лемма. *Пусть* $T \in \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ и $\nabla^{-1/2}(T) = S \in \mathfrak{N}_\mu^*\mathfrak{N}_\mu$. *Для* $A \in \mathfrak{B}$ *определен функционал* $\mu(AT)$. *Его можно единственным образом продолжить на всё*

$\mathfrak{A}$ до функционала из $\mathfrak{A}_*$. Функционал положителен тогда и только тогда, когда $S \geqslant 0$. В этом случае его норма равна $\mu(S)$.

Лемма позволяет отождествить часть $\mathfrak{A}$ с плотным подпространством из $\mathfrak{A}_*$.

По определению к.г. $\mathfrak{G}$ однозначно определяется набором $(\mathfrak{A}, \Phi, +, \mu)$, называемым пространством к.г. (п.к.г.). Здесь $\mathfrak{A}$ — неймановская алгебра операторов в гильбертовом пространстве H (алгебра п.к.г.), Φ: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ — нормальный мономорфизм неймановских алгебр, $+$: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ — антилинейное отображение (инволюция п.к.г.) и μ — вес на $\mathfrak{A}$ (левоинвариантный вес алгебры п.к.г.). Имеют место следующие

Аксиомы. I. Φ *определяет коассоциативную кооперацию.*

Таким образом, $\mathfrak{A}$ снабженная мономорфизмом Φ, обладает структурой алгебры Хопфа—фон Неймана.

Обозначим знаком $\sim$ изоморфизм $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$, продолжающий отображение $A \otimes B \to \overline{A \otimes B} = B \otimes A$, $A, B \in \mathfrak{A}$.

II. $(A^+)^+ = A$, $(AB)^+ = A^+B^+$, $(A^+)^* = (A^*)^+$, $\Phi(A^+) = \Phi(A)^+$, $A, B \in \mathfrak{A}$.

III. μ — *стандартный вес.*

IV. $\sigma_t(A^+) = \sigma_{-t}(A))^+$, $\Phi(\sigma_t(A)) = (\sigma_t \otimes I)\Phi(A)$, $A \in \mathfrak{A}$.

V. $\mu(A^+) = \mu(\Delta A)$, *где* Δ — *положительный самосопряженный оператор в* H, *присоединенный к центру алгебры* $\mathfrak{A}$, $A \in \mathfrak{A}_+$ ($\mathfrak{A}_+$ — *множество положительных элементов алгебры* $\mathfrak{A}$).

В соответствии со сформулированной выше леммой определим по весу $\mu \otimes \mu$ функционал $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$.

VI. *Для всех* $A, B, C \in \mathfrak{B}^4$

$$\langle \Phi(C), A \otimes B \rangle = \langle \overline{(+\otimes *)\Phi(B), \tilde{A^*} \otimes C^*} \rangle.$$

Последнее соотношение по существу представляет собой некоторое условие на вес μ; вес, удовлетворяющий этому условию, назовем левоинвариантным.

По определению, левоинвариантный вес μ алгебры п.к.г. определен с точностью до положительного нормировочного множителя. Изоморфизм $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ неймановских алгебр определяет *изоморфизм* соответствующих к.г., если он коммутирует с отображениями Φ, $+$ и переводит левоинвариантные веса друг в друга (при их надлежащей нормировке).

Любая локально-компактная группа может быть следующим образом отождествлена с к.г. В качестве $\mathfrak{A}$ выберем неймановскую алгебру всех ограниченных измеримых функций $f(g)$ на G. Положим

$$\Phi(f) = f(g'g),\ g, g' \in G, \quad f^+(g) = \overline{f(g^{-1})}, \quad \mu(f) = \int f(g)\,dg,$$

где dg — левоинвариантная мера Хаара. В этом случае $\mathfrak{U}$ является гильбертовой алгеброй. Поэтому $\sigma_t = I$ и $\overline{*} = *$, $f^*(g) = \overline{f(g)}$. Оператор Δ из V является оператором умножения на модулярную функцию $\Delta(g)$.

Перейдем к определению к.г. $\hat{\mathfrak{G}}$, двойственной к.г. $\mathfrak{G}$. Основную роль в нашем изложении играют двойные модулярные гильбертовы алгебры (д.м.г.а.).

3. Определение двойной модулярной гильбертовой алгебры. Плотное подпространство D гильбертова пространства $\mathscr{H}$ называется д.м.г.а., если на нем определены две пары операций: умножение $a \cup b$, инволюция $a^{\cup}$ (первая пара) и умножение $a \cap b$, инволюция $a^{\cap}$ (вторая пара) так, что относительно каждой пары D образует модулярную гильбертову алгебру. Обозначим через $\overline{\cup}$, $\Delta_{\cup}$ и $\overline{\cap}$, $\Delta_{\cap}$ соответствующие сопряженные инволюции и модулярные операторы. Предполагается также, что оператор W в $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$, однозначно определяемый равенством $(a \cup a', b \cap b') = (a \otimes b'^{\overline{\cap}}, W(a'^{\overline{\cup}} \otimes b))$ (связывающий оператор), ограничен.

$\mathscr{L}_{\cup}(D)$ — левая неймановская алгебра д.м.г.а. D, рассматриваемой как модулярная алгебра относительно первой пары операций. На операторах из $\pi_{\cup}(D)$, кроме естественных операций умножения $\pi_{\cup}(a)\pi_{\cup}(b) = \pi_{\cup}(a \cup b)$ и сопряжения $(\pi_{\cup}(a))^* = \pi_{\cup}(a^{\cup})$, можно определить свертку и инволюцию, полагая: $\pi_{\cup}(a) * \pi_{\cup}(b) = \pi_{\cup}(a \cap b)$, $\pi_{\cup}(a)^+ = \pi_{\cup}(a^{\overline{\cap}})$. Положим также $\pi_{\cup}(a)^{\bar{*}} = \pi_{\cup}(a^{\overline{\cup}})$, $\pi_{\cup}(a)^{\mp} = \pi_{\cup}(a^{\cap})$. Аналогичным образом определяются операции на $\pi_{\cap}(D)$.

4. Основные теоремы. Если $\mathfrak{A}$ — алгебра п.к.г., то наличие кооперации Φ позволяет естественным образом определить свертку на $\mathfrak{A}_*$ равенством $\langle A, f * g\rangle = \langle \Phi(A), f \otimes g\rangle$ (см. [7]). Лемма п.2 и аксиомы к.г. позволяют построить $*$-подалгебру $\mathfrak{D}$ алгебры $\mathfrak{A}$, плотную в $\mathfrak{A}_*$ и инвариантную относительно $+$ и свертки. Из аксиомы 5) к.г. следует, что отображение $+$ можно понимать как предзамкнутый антилинейный оператор в пространстве $\mathfrak{H}_\mu$; пусть $\mp$ — сопряженная инволюция. Тогда можно показать, что $\mathfrak{D}$ является д.м.г.а. относительно операций умножения AB, сопряжения A^* и свертки $A * B$, инволюции $A^{\mp}$. Отметим, что модулярный оператор на $\mathfrak{D}$, который стандартным образом строится по $\mp$, определяется отображением $A \to \Delta^{-1}A$, где $A \in \mathfrak{D}$, Δ — оператор, фигурирующий в аксиоме 5) к.г.

Теорема 1. *По каждой к.г. можно каноническим образом построить д.м.г.а. $\mathfrak{D}$, удовлетворяющую следующим аксиомам:*

1) *операторы $\Delta_{\cup}$ и $\Delta_{\cap}$ коммутируют (как самосопряженные операторы).*

2) $(a^{\cup})^{\cap} = (a^{\cap})^{\cup}$, $(a^{\cap})^{\overline{\cup}} = (a^{\overline{\cup}})^{\cap}$, $(a^{\cup})^{\overline{\cap}} = (a^{\overline{\cap}})^{\cup}$.

3) $\Delta_{\cap}(a \cup b) = \Delta_{\cap}(a) \cup b = a \cup \Delta_{\cap}(b)$, $\Delta_{\cup}(a \cap b) = \Delta_{\cup}(a) \cap b = a \cap \Delta_{\cup}(b)$.

4) $(a \cup b)^{\overline{\cap}} = a^{\overline{\cap}} \cup b^{\overline{\cap}}$, $(a \cap b)^{\overline{\cup}} = a^{\overline{\cup}} \cap b^{\overline{\cup}}$, $a, b \in \mathfrak{D}$.

5) *Связывающий оператор W унитарен.*

6) $(W \otimes I)(I \otimes W)(W^* \otimes I) = (I \otimes W)(\sim \otimes I)(I \otimes W)(\sim \otimes I)$.

Теорема 2. *Для любой д.м.г.а. D, удовлетворяющей аксиомам* 1)—6), *существует к.г. $\mathfrak{G}$, алгеброй пространства которой является $\mathscr{L}_{\cup}(D)$, левоинвариантным весом — канонический вес на $\mathscr{L}_{\cup}(D)$,*

$$\Phi(A) = W(I \otimes A)W^*, A \in \mathscr{L}_{\cup}(D), A^+ = \pi_{\cup}(a^{\overline{\cap}}), \textit{если } A = \pi_{\cup}(a), a \in D.$$

Относительно $\mathfrak{G}$ и D, фигурирующих в теоремах 1, 2, скажем, что они связаны по первой операций.

Теорема 3. *Если в д.м.г.а. D, удовлетворяющей аксиомам* 1) — 6), *поменять наименование пар операций, вновь получим д.м.г.а., удовлетворяющую аксиомам* 1) — 6).

Обозначим ее через $\hat{D}$. К.г., связанную с $\hat{D}$ по первой паре операций, назовем двойственной к к.г. $\mathfrak{G}$ и обозначим через $\hat{\mathfrak{G}}$. Иначе говоря, $\hat{\mathfrak{G}}$ — это к.г., связанная с D по второй паре операций. Можно показать, что $\hat{\hat{\mathfrak{G}}}$ изоморфна $\mathfrak{G}$.

5. Преобразование Фурье. Согласно определению, алгебрами п.к.г. $\mathfrak{G}$ и $\hat{\mathfrak{G}}$ служат соответственно $\mathscr{L}_{\cup}(D)$ и $\mathscr{L}_{\cap}(D)$. Пусть $A = \pi_{\cup}(a)$, $a \in D$. Его преобразованием Фурье $\hat{A}$ назовем оператор $\pi_{\cap}(a)$. Преобразование Фурье отображает взаимно однозначно $\pi_{\cup}(D)$ на $\pi_{\cap}(D)$. Ниже приводятся преобразования Фурье операторов из $\pi_{\cup}(D)$:

AB	$A*B$	A^*	A^+	$A^{\bar{*}}$	$A^{\mp}$	$\nabla(A)$	ΔA
$\hat{A}*\hat{B}$	$\hat{A}\hat{B}$	$\hat{A}^{\mp}$	$\hat{A}^{\bar{*}}$	$\hat{A}^+$	$\hat{A}^*$	$\Delta^{-1}\hat{A}$	$\nabla^{-1}(\hat{A})$

Здесь $A, B \in \pi_{\cup}(D)$. Имеет место формула Планшереля

$$\mu(B^*A) = \mu(\hat{B}^*\hat{A}).$$

6. Связь с другими работами. Компактные и дискретные к.г.

Теорема 4. *К.г. является локально-компактной группой в том и только в том случае, если алгебра ее пространства коммутативна. К.г. является двойственной к локально-компактной группе в том и только в том случае, если коалгебра ее пространства кокоммутативна*: $\tilde{\Phi} = \Phi$.

Первая часть теоремы в унимодулярном случае доказана Стайнспрингом ([8]) и в общем случае Такесаки ([7]). В этих работах имеется также конструкция пространств, соответствующих двойственным к.г., однако отсутствует их аксиоматическое описание. Такое описание было получено впервые М. Г. Крейном ([9]) для случая компактных групп, Г. И. Кацем ([1]) для унимодулярных групп и Л. И. Вайнерманом ([10]) в общем случае.

Естественно различать следующие частные случаи к.г.: а) $\nabla = I$, б) $\Delta = I$, в) $\nabla = \Delta = I$. При переходе к двойственной к.г. классы а) и б) отображаются один на другой, а класс в) — на себя. К.г. класса в) назовем унимодулярными. Они изучены в ([1]). В этом случае аксиомы 1)—(6) сводятся к аксиомам из ([1]).

Замечание. Первая часть аксиомы ξ) из ([1]) оказалась лишней. Она следует из остальных аксиом.

В статье ([11]) введены алгебры Хопфа — фон Неймана, являющиеся п.к.г. класса а). Там же построены пространства двойственных им к.г. (т. е класса б)), однако не получено их аксиоматическое описание. В ([11]) получены также различные варианты принципа двойственности для локально-компактных групп (в частности, в форме Татсуумы). Отметим, что работы ([7, 10, 11]) явились отправным пунктом для настоящей статьи.

Назовем к.г. компактной, если $\mu(I) < \infty$, и дискретной, если алгебра ее пространства является прямой суммой факторов типа I_n. В ([12]) в предположении унимодулярности установлена двойственность между компактными и дискретными к.г. Почти не меняя рассуждения статьи ([12]), можно избавиться от предположения унимодулярности. Таким образом, имеет место

Теорема 5. *Компактные и дискретные к.г. унимодулярны.*

Если к.г. $\mathfrak{G}$ компактна, то к.г. $\hat{\mathfrak{G}}$ дискретна. Если к.г. $\mathfrak{G}$ дискретна, то к.г. $\hat{\mathfrak{G}}$ компактна.

Поступило
2 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. И. Кац, ДАН, **138**, № 2, 275 (1961); Тр. Московск. матем. общ., **12**, 159 (1963); **14**, 84 (1965). [2] M. Takesaki, Lecture Notes, **128** (1970). [3] J. Dixmier, Comm. Math. Helv., **26**, 275 (1952). [4] F. Combes, J. Math. pure et appl., **47**, 57 (1968). [5] F. Combes, Comp. Math., **23**, 1, 49 (1971). [6] Г. И. Кац, В. Г. Палюткин, Тр. Московск. матем. общ., **15**, 224 (1966). [7] M. Takesaki, Am. J. Math., **91**, 529 (1969). [8] W. F. Stinespring, Trans. Am. Math. Soc., **90**, 15 (1959); Сборн. пер., Математика, 6, 2, 107 (1962). [9] М. Г. Крейн, ДАН, **69**, 6, 725 (1949). [10] Л. И. Вайнерман, Функц. анализ, 7, 3 (1973). [11] M. Takesaki, Bull. Am. Math. Soc., **77**, 4, 553 (1971); Lecture Notes, **247**, 666 (1972). [12] Г. И. Кац, Укр. матем. журн., 4, 3, 260 (1962).