Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 5

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

М. И. ГИЛЬ

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ УЗЛАХ С НЕУНИТАРНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЯМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 7 II 1973)

В настоящей статье вводятся понятия W-операторного узла и его характеристической оператор-функции (х.о.ф.), которые включают в себя как частный случай соответственно понятия традиционного узла, характеристической функции М. С. Лившица и характеристической функции сжатия (см. ([1–7])).

Можно показать, что W-узел ассоциируется с открытой системой, в которой происходит частичное рассеивание энергии входного сигнала, аналогично тому, как традиционный операторный узел ассоциируется с открытой системой, в которой энергия входного сигнала сохраняется. В соответствии с этим х.о.ф. W-узла в общем случае при вещественном аргументе, в отличие от характеристической функции М. С. Лившица, неунитарна в индефинитной метрике.

С помощью х.о.ф. W-узла получен критерий унитарной эквивалентности произвольных ограниченных операторов. Кроме того, получено мультипликативное представление х.о.ф. W-узла и, в частности, резольвенты оператора, допускающего треугольное представление.

1. Определение 1. W-операторным узлом (W-узлом) будем называть совокупность гильбертовых пространств H, E и D и операторов A, Γ и W, действующих соответственно в H, из E в H и из D в H таких, что

$$2A_J = \frac{1}{i}(A - A^*) = \Gamma J \Gamma^* + WJW^*; \tag{1}$$

J — сигнатурный оператор, действующий в пространстве $E \oplus D$, т. е. $J^* = J$, $J^2 = I$. Буква I здесь и в дальнейшем означает единичный оператор.

W-узел будем обозначать символом

$$M = \begin{pmatrix} A, & \Gamma, & W, & J \\ & H, & E, & D \end{pmatrix}.$$

Определим х.о.ф. W-узла равенством

$$S_M(\omega) = I - iJ\Gamma^*(A - \omega I)^{-1}\Gamma. \tag{2}$$

Очевидно, если в (1) положить $W = 0$, то получим х.о.ф. М. С. Лившица.

Если же $\Gamma = (I - A^*A)^{1/2}$, то $S_M^*(\omega)$ будет фактически отличаться от характеристической функции сжатия

$$\theta = -A + \lambda J(I - AA^*)^{1/2}(I - \lambda A^*)^{-1}(I - A^*A)^{1/2}$$

лишь на постоянный оператор. Нам еще понадобится функция $Q_M(\omega)$, действующая из E в D и определяемая равенством

$$Q_M(\omega) = W^*(A - \omega I)^{-1}\Gamma. \tag{3}$$

Она представляет собой оператор отображения входа ассоциированной открытой системы в канал, где происходит рассеивание энергии входного сигнала.

Теорема 1. *Функции $S_M(\omega)$ и $Q_M(\omega)$ удовлетворяют следующим соотношениям*:

$$S_M^*(\omega) J S_M(\omega) = J - Q_M^*(\omega) J Q_M(\omega), \qquad \operatorname{Im}\omega = 0.$$

$$S_M^*(\omega) J S_M(\omega) > J - Q_M^*(\omega) J Q_M(\omega), \qquad \operatorname{Im}\omega > 0.$$

Из теоремы 1 следует, что функция $S_M(\omega)$ при вещественном аргументе унитарна в идефинитной метрике, порожденной оператором J лишь при $Q_M(\omega) = 0$, т. е. принадлежит к более широкому классу, чем J-нерастягивающие оператор-функции.

2. Оператор A, входящий в определение 1, будем называть основным оператором, а функцию $Q_M(\omega)$ — дополнительной оператор-функцией (д.о.ф.) W-узла M.

Отметим, что для образования W-узла, в качестве основного оператора можно взять произвольный ограниченный оператор.

Пусть оператор A допускает треугольное представление:

$$A = \int\limits_{\pi} \varphi(P)\, dP + 2i \int\limits_{\pi} P A_J\, dP, \tag{4}$$

где $\pi = \{P\}$ — максимальная цепочка ортопроекторов на инвариантные пространства оператора A, $\varphi(P)$ — непрерывная слева неубывающая скалярная функция.

Условия представимости операторов в виде (4) указаны в статьях ([2], [3]).

Обозначим символом σ такое разбиение цепочки π, чтобы условие

$$dP\, WJW^*\, dP' = 0, \quad P \neq P, \quad P, P' \in \sigma,$$

выполнялось с наименьшим возможным весом.

Теорема 2. *Если основной оператор W-узла M допускает представление* (4), *то х.о.ф. и д.о.ф. этого узла представимы в виде*

$$S_M(\omega) = \int\limits_{\sigma}^{\curvearrowleft} (I - iJ\Gamma^* R_P(\omega)\Gamma),$$

$$Q_M(\omega) = \int\limits_{\sigma} W^* R_P(\omega) S_P(\omega),$$

где

$$R_P(\omega) = dP(A - \omega I)^{-1} dP, \quad P \in \sigma,$$

$$S_P(\omega) = \int\limits_{\sigma_P}^{\curvearrowleft} (I - iJ\Gamma^* R_{P'}(\omega)),$$

σ_P — *интервал* $0 < P' < P$ *цепочки* σ.

Если P_1 — минимальный ортопроектор цепочки σ, *то* $S_{P_1}(\omega) = I$.

Доказательство теоремы 2 основано на некотором обобщении понятия сцепления традиционных операторных узлов ([1]).

Если функция $\Gamma^* R_P(\omega)\Gamma$ имеет ограниченную операторную вариацию, т. е. если

$$\sup_{\sigma_N} \sum_{k=1}^{N} \| \Gamma^* \Delta P_k (A - \omega I)^{-1} \Delta P_k \Gamma \| < \infty,$$

где σ_N — произвольное разбиение цепочки σ, то можно записать

$$S_M(\omega) = \int\limits_{\sigma}^{\curvearrowleft} \exp\left[-iJ\Gamma^* R_P(\omega)\Gamma\right].$$

Отметим, что при $\sigma = \pi$

$$S_M(\omega) = \int\limits_{\sigma}^{\curvearrowleft} \left(I - iJ\Gamma^* \frac{dP}{\varphi(P) - \omega} \Gamma \right).$$

При этом не обязательно, чтобы $W = 0$.

С л е д с т в и е 1. *Если оператор допускает треугольное представление* (4), *то его резольвента* $R(\omega)$ *представима в виде*

$$R(\omega)=I-\int_{\sigma}^{\curvearrowleft}(I-R_P(\omega)),$$

где σ — *максимальная цепочка ортопроекторов на непересекающиеся инвариантные подпространства оператора* A.

3. О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что W-узлы

$$M_1=\begin{pmatrix} A_1, & \Gamma_1, & W_1, & J \\ & H_1, & E, & D\end{pmatrix},\quad M_2=\begin{pmatrix} A_2, & \Gamma_2, & W_2, & J \\ & H_2, & E, & D\end{pmatrix} \tag{5}$$

у н и т а р н о э к в и в а л е н т н ы, если существует изометрическое отображение U пространства H_1 на H_2 такое, что $UA_1=A_2U$, $U\Gamma_1=\Gamma_2$, $UW_1=W_2$.

В теоремах 3 и 4 все операторы предполагаются ограниченными.

Т е о р е м а 3. *Пусть* M_1, M_2 — *W-узлы, определенные равенством* (5), *причем область определения оператора* A *и линейная оболочка векторов* $\Gamma_k e$, $e\in E$, *плотны в* H_k, $k=1, 2$. *Если при этом* $S_{M_1}(\omega)=S_{M_2}(\omega)$, *то W-узлы* M_1 *и* M_2 (*а значит, и операторы* A_1 *и* A_2) *унитарно эквивалентны.*

Очевидно, если $\dim E\geqslant \dim H$, то всегда можно найти такой оператор Γ, Γ: $E\to H$, что линейная оболочка векторов Γe, $e\in E$, плотна в H.

Т е о р е м а 4. *Пусть* M_1, M_2 — *W-узлы, определенные равенством* (5), *причем область определения оператора* A *и линейная оболочка векторов* $A_k^n\Gamma_k e$, $n=0, 1, 2$; $e\in E$, *плотны в* H_k, $k=1, 2$. *Если при этом одновременно выполняются равенства* $S_{M_1}(\omega)=S_{M_2}(\omega)$, $Q_{M_1}(\omega)=Q_{M_2}(\omega)$, *то W-узлы* M_1 *и* M_2 (*а значит, и операторы* A_1 *и* A_2) *унитарно эквивалентны.*

Целиноградский сельскохозяйственный
институт

Поступило
24 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. С. Л и в ш и ц, Операторы, колебания, волны. Открытые системы, М., 1966. [2] И. Ц. Г о х б е р г, М. Г. К р е й н, ДАН, 175, № 2 (1967). [3] В. М. Б р о д с к и й, М. С. Б р о д с к и й, ДАН, 181, № 3 (1968). [4] М. С. Б р о д с к и й, Треугольные и жордановы представления линейных операторов, М., 1969. [5] М. С. Л и в ш и ц, А. А. Я н ц е в и ч, Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах, Харьков, 1971. [6] Б. С е к е ф а л ь в и - Н а д ь, Ч. Ф о я ш, Гармонический анализ операторов в гильбертовых пространствах, М., 1970. [7] В. М. Б р о д с к и й, ДАН, 190, № 3 (1970).