

А. Б. КАЗАНСКИЙ

## ТЕОРИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ИЗВИЛИСТОСТИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком П. Я. Кочинной 3 VIII 1972)

Для статистической интерпретации фильтрационного движения до настоящего времени привлекали аналогию микрокартины фильтрационного потока турбулентному потоку жидкости, причем для описания полей скорости и давления фильтрационного потока использовали уравнения движения сплошной среды. Таким образом, для моделирования фильтрационного потока применяли замену его поля скорости полем скорости некоторого потока сплошной среды (жидкости); при этом для обоснования закона сопротивления использовали уравнения Навье — Стокса, а для описания процессов фильтрационной диффузии и теплопроводности, по аналогии с турбулентной диффузией и теплопроводностью, — фиковские диффузионные уравнения с «эффективными» коэффициентами переноса, зависящими от средней скорости фильтрации.

В работах (1-4) был развит принципиально другой подход к описанию фильтрационного движения, основанный на предложенном методе осреднения уравнений движения, диффузии и теплопроводности, написанных для течения жидкости внутри проточных поровых полостей. В результате для фильтрационной среды получаются уравнения относительно средних величин скорости фильтрации, концентрации примеси и температуры. В качестве параметров в этих уравнениях присутствуют характеристики структуры пористого скелета, а также константы, характеризующие фильтрующуюся жидкость и взаимодействие переносимой примеси со стенками проточных пор. Получаемые осредненные уравнения в ряде случаев отличаются от аналогичных классических соотношений, причем эти отличия можно рассматривать как уточнения классических соотношений за счет предложенного метода перехода от элементарных уравнений для внутрипоровых пространств к уравнениям осредненного режима.

Таким образом, развитый метод основан на отказе от концепции сплошной среды и использует представления о фильтрационном потоке как о системе стационарных или квазистационарных внутрипоровых микротечений через неподвижный пористый скелет. В предложенной теории, однако, содержится ряд допущений, и самое главное из них связано с предположением об обязательной ориентации поровых потоков жидкости в полупространство вперед, по направлению средней скорости фильтрации. Настоящая статья в значительной степени посвящена попытке экспериментального обоснования этого допущения. Ниже показано, что вычисляемый теоретически, по методу, основанному на принятии упомянутого допущения, коэффициент извилистости среды оказывается в хорошем совпадении с его величиной, определяемой экспериментально.

Согласно теории (1-4), ориентация поровых струек в пространстве описывается двумя углами  $\varphi$  и  $\psi$ , где в прямоугольной системе координат  $xuz$  с осью  $x$ , направленной вдоль среднего потока, угол  $\varphi$  образован направлением порового потока, проходящего через начало координат, и проекцией этого потока на плоскость  $xu$ , а угол  $\psi$  отсчитывается в плоскости  $xu$  между осью  $x$  и проекцией порового потока на плоскость  $xu$ . При вычислении среднего потока принято условие, что индивидуальные поровые потоки ориентированы в полупространство вперед, в сторону среднего течения. Это условие определяет пределы вариации углов  $\varphi$  и  $\psi$ :  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ ,  $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$ . Согласно предложенной теории, математи-

ческое ожидание  $\langle u_i S_i \rangle$  порового потока, пересекающего фиксированную точку среды, вычисляется как

$$\langle u_i S_i \rangle = m \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u_i S_i f(S_i) f_1(\varphi) f_2(\psi) dS_i d\varphi d\psi; \quad (1)$$

здесь  $u_i$  — скорость порового потока, осредненная по площади  $S_i$  его поперечного сечения,  $m$  — пористость среды, вычисляемая как отношение суммарного объема проточных пор к общему объему пористой среды. Последняя величина равна вероятности того, что через фиксированную точку среды проходит поровый поток жидкости.  $f(S_i)$ ,  $f_1(\varphi)$ ,  $f_2(\psi)$  — вероятностные функции распределения проточных пор по площадям их поперечных сечений  $S_i$  и по углам  $\varphi$  и  $\psi$ ; предположение о том, что общая плотность вероятности записывается в виде произведения независимых величин, не является принципиальным и принято для удобства некоторых вычислений (случай изотропного материала определяется очевидным условием  $f_1 = f_2 = 1/\pi$ ).

Разделив (1) на среднюю площадь  $\langle S_i \rangle$  поперечного сечения поровых каналов, внутри которых может оказаться фиксированная точка среды

$$\langle S_i \rangle = \int_0^{\infty} S_i f(S_i) dS_i, \quad (2)$$

получим выражение для так называемой средней скорости  $\langle u_i \rangle$  фильтрации, определяемой в классической теории через средний расход жидкости в поперечном к среднему потоку сечении:

$$\langle u_i \rangle = m \langle S_i \rangle^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u_i S_i f(S_i) f_1(\varphi) f_2(\psi) dS_i d\varphi d\psi. \quad (3)$$

Существенным здесь является то, что, согласно предложенной теории, при вычислении среднего расхода через поперечное сечение фильтрационного потока суммируются поровые потоки, пересекающие это сечение по произвольным направлениям, ориентированным в полупространство  $x > 0$ , т. е. в сторону среднего течения.

В отличие от формул (1) и (3) при вычислении математического ожидания потока жидкости, направленного вдоль оси  $x$ , нужно суммировать не сами величины поровых потоков, а их проекции на ось  $x$ , т. е. величины  $u_i S_i \cos \varphi \cos \psi$ . В соответствии с этим, величину, известную в теории фильтрации как «средняя поровая скорость» (обозначим ее символом  $\langle\langle u_i \rangle\rangle$ ), следует вычислять как

$$\langle\langle u_i \rangle\rangle = \langle S_i \rangle^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u_i S_i \cos \varphi \cos \psi f(S_i) f_1(\varphi) f_2(\psi) dS_i d\varphi d\psi. \quad (4)$$

Определенная таким образом скорость должна, в частности, соответствовать скорости распространения пятна краски вдоль среднего течения фильтрационного потока. Существенным в формуле (4) является то, что в ее правой части не содержится величина  $m$ , поскольку в данном случае нас не интересует вероятность нахождения фиксированной точки среды внутри проточного порового канала, рассматриваются только те точки, которые заведомо пересекаются поровыми потоками.

Умножив величину  $\langle\langle u_i \rangle\rangle$  на  $m$ , получим выражение для средней скорости  $\bar{u} = m \langle\langle u_i \rangle\rangle$ , сконструированное аналогично формуле (3), но в основу осреднения положены не сами величины поровых потоков  $u_i S_i$ , а их проекции на ось  $x$ .

Таким образом, можно констатировать, что при вычислении величины скорости  $\langle u_i \rangle$  по формуле (3) учитываются перемещения частиц воды по всевозможным направлениям, обусловленным извилистостью скелета пористого материала, а при вычислении величины скорости  $\langle\langle u_i \rangle\rangle$  и  $\bar{u}$  учитываются только составляющие этих перемещений вдоль кратчайшего рас-

стояния по оси  $x$ . Отсюда следует, что отношение этих скоростей равно коэффициенту извилистости пористой среды  $F$ , где  $F = \langle u_i \rangle m^{-1} \times \langle u_i \rangle^{-1}$ . Действительно, в теории фильтрации под коэффициентом извилистости подразумевается отношение общего пути, пройденного частицей жидкости в извилистом поровом скелете между двумя фиксированными точками, к кратчайшему расстоянию между этими точками.

Полученный результат удобно переписать в виде формулы

$$\langle u_i \rangle = mF \langle u_i \rangle, \quad (5)$$

которая является принципиальным уточнением (коэффициент  $F$  в ее правой части) известного в теории фильтрации соотношения между скоростями  $\langle u_i \rangle$  и  $\langle u_i \rangle$ , записываемого в классической теории в виде  $\langle u_i \rangle = m \langle u_i \rangle$  и справедливого с точки зрения предлагаемой теории только для материала, состоящего из параллельных поровых каналов. Выражая в (3) и (4) величины  $u_i$  через формулу Пуазейля  $u_i = cS_i \text{grad } p \cos \varphi \cos \psi$ , где  $c = \text{const}$ , а  $p$  — среднее давление, и переходя к случаю изотропного пористого материала ( $f_1 = f_2 = \text{const}$ ), получим для коэффициента извилистости выражение, позволяющее перейти к числовой оценке:

$$F = \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \cos \psi \, d\varphi \, d\psi \right] \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \cos^2 \psi \, d\varphi \, d\psi \right] = 1,6. \quad (6)$$

Интересно сопоставить этот результат с данными эксперимента, который был проведен нами по следующей схеме. В вертикальной стеклянной трубке, заполненной белым речным песком, создавался постоянный фильтрационный поток воды. В нижнем торце трубки был вмонтирован сливной кран, скорость вытекания воды из которого была постоянной. Для обеспечения этого поддерживался постоянный уровень воды в трубке над верхней поверхностью песка.

Поскольку площадь поперечного сечения трубки и расход воды через это сечение известны, то известна также и величина средней скорости фильтрации в трубке  $\langle u_i \rangle$ . Кроме того известна пористость песка  $m$ ; следовательно, для оценки коэффициента извилистости среды по формуле (5) недостает значения средней поровой скорости  $\langle u_i \rangle$ . Для измерения этой величины использовалась вносимая в пористую среду на фоне установившегося фильтрационного потока прослойка подкрашенной воды (эозин натрия). Движение этой прослойки в песке четко наблюдалось через прозрачную стенку трубки. Размыв прослойку по вертикали был незначительным и не препятствовал надежному измерению скорости продвижения середины прослойки. Согласно изложенной выше теории, эта скорость равна искомой средней поровой скорости  $\langle u_i \rangle$ . Таким образом, все три величины:  $\langle u_i \rangle$ ,  $m$  и  $\langle u_i \rangle$ , необходимые для оценки  $F$  по формуле (5), измерялись независимо одна от другой.

Оценка величины  $F$  с разными скоростями фильтрации в трубке дала один и тот же результат:  $F \approx 1,56$ , который находится в близком совпадении с результатом, предсказываемым теорией для изотропного материала (6). Оба эти результата, теоретический и экспериментальный, находятся в удовлетворительном согласии с известными в литературе данными о коэффициентах извилистости пористых сред, полученными по измерениям электрического сопротивления заполняющей образцы исследуемого материала жидкости. По данным (5), обобщающим другие источники, эта величина для большинства исследованных материалов близка к 1,5.

Институт водных проблем  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
26 VI 1972

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. Б. Казанский, Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 5 (1967).  
<sup>2</sup> А. Б. Казанский, там же, № 3 (1969). <sup>3</sup> А. Б. Казанский, ДАН, 188, № 4 (1969). <sup>4</sup> А. Б. Казанский, ДАН, 200, № 4 (1974). <sup>5</sup> М. Э. Аэров, О. М. Голдес, Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным кипящим зернистым слоем, Л., 1968.