**Доклады Академии наук СССР**
1973. Том 210, № 3

УДК 519.95 *МАТЕМАТИКА*

В. Б. КУДРЯВЦЕВ

# О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ $\mathscr{P}_\Sigma$

*(Представлено академиком А. А. Дородницыным 19 VII 1972)*

1. Изучаются свойства некоторых алгебр, возникающих в структурной теории автоматов и представляющих самостоятельный интерес. Такого рода алгебры, описывающие функционирование управляющих систем, следуя С. В. Яблонскому [1], называем здесь функциональными системами. Функциональные системы характеризуются тем, что их элементами являются функции, реализуемые управляющими системами, а операции индуцируются правилами построения управляющих систем из заданных. В качестве управляющих систем выбираются конечные автоматы с некоторым числом входных и выходных каналов. Из этих автоматов строятся аналогичные автоматы путем отождествления тех входных каналов, которые принимают одни и те же значения, а также путем подсоединения выходного канала одного автомата к входному каналу другого в том случае, когда все значения, принимаемые последним каналом, принимаются также и указанным выходным каналом. Эта модель приводит к целому ряду алгебр. Мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда автоматы не имеют памяти и когда множество тех множеств, которые являются областями значений входных или выходных каналов автоматов, является конечным.

2. Пусть $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$, где $\Sigma_1 = \{A_1, A_2, \ldots, A_s\}$, $\Sigma_2 = \{B_1, B_2, \ldots, B_t\}$, $A_i = \{a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{r_i}^i\}$, $B_j = \{b_1^j, b_2^j, \ldots, b_{r_j}^j\}$, $A_i \neq A_k$, $B_j \neq B_l$ при $i \neq k$, $j \neq l$ и пусть $X_i = \{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i, \ldots\}$, $1 \leqslant i$, $k \leqslant s$, $1 \leqslant j$, $l \leqslant t$.

Множество $X_i$ состоит из переменных, принимающих значения из $A_i$. Пусть $P_\Sigma^{B_j}$ — множество всех функций $f(x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{n_2}^2, \ldots$ $\ldots, x_1^s, \ldots, x_{n_s}^s)$, принимающих значения из $B_j$. Обозначим $P_\Sigma = \bigcup_{j=1}^{t} P_\Sigma^{B_j}$. В множестве $P_\Sigma$ введем операции, которые естественно обобщают операции суперпозиции и за которыми мы сохраним название суперпозиции. Эти операции состоят в переименовании с возможным отождествлением переменных у функции внутри любого алфавита $X_i$ и в подстановке функции в функцию вместо некоторого переменного, если все значения подставляемой функции принимаются указанным переменным. Полученную алгебру обозначим через $\mathscr{P}_\Sigma$ и назовем **функциональной системой**. Ясно, что введенные в $\mathscr{P}_\Sigma$ операции могут быть формально записаны путем некоторой модификации операторов, использованных А. И. Мальцевым при рассмотрении им итеративных алгебр Поста [2], и что последние являются частным случаем наших функциональных систем.

Обозначим через $|C|$ мощность множества $C$. Естественно считать, что для функциональной системы $\mathscr{P}_\Sigma$ выполнено $|A_i| > 1$, $B_j \not\subseteq B_l$ при любых $i, j, l$, таких, что $j \neq l$.

Пусть $M \subseteq \mathscr{P}_\Sigma$. Множество $[M]$ называется **замыканием** $M$, если оно состоит в точности из всех функций, которые получаются из функций множества $M$ при помощи операций суперпозиции. Множество $M$ называется **замкнутым**, если $[M] = M$, и **полным**, если $[M] = P_\Sigma$. Множество $M$ называется **предполным классом**, если оно не полно, но для любой функции $f \notin M$ имеет место $[M \cup \{f\}] = P_\Sigma$. Очевидно, предполный класс является замкнутым.

Теорема 1. *Множество предполных классов в $\mathscr{P}_\Sigma$ конечно и все предполные классы строятся эффективно.*

Теорема 2. *Существует алгоритм, который для любого $P_\Sigma$ и любого конечного множества $M \subset P_\Sigma$ устанавливает свойство множества $M$ быть полным в $\mathcal{P}_\Sigma$.*

$\mathcal{P}_\Sigma$ называется **правильной**, если каждый замкнутый класс ее содержится в некотором предполном классе.

Теорема 3. а) *$\mathcal{P}_\Sigma$ правильная тогда и только тогда, когда существуют $A_i \in \Sigma_1$ и $B_j \in \Sigma_2$ такие, что $|A_i \cap B_j| \geqslant 2$;*

б) *$\mathcal{P}_\Sigma$ содержит предполные классы и замкнутые классы, отличные от $P_\Sigma$ и не содержащиеся ни в одном предполном классе, тогда и только тогда, когда для любых $A_i \in \Sigma_1$, $B_j \in \Sigma_2$ справедливо $|A_i \cap B_j| \leqslant 1$ и существуют $A_{i'} \in \Sigma_1$, $B_{j'} \in \Sigma_2$ такие, что $|A_{i'} \cap B_{j'}| = 1$;*

в) *$\mathcal{P}_\Sigma$ не содержит предполных классов тогда и только тогда, когда для любых $A_i \in \Sigma_1$, $B_j \in \Sigma_2$ имеет место $A_i \cap B_j = \varnothing$.*

$\mathcal{P}_\Sigma$ называется **конечно-порожденной**, если в $\mathcal{P}_\Sigma$ существует конечное полное множество.

Теорема 4. *$\mathcal{P}_\Sigma$ конечно-порожденная тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_\Sigma$ правильная.*

Полное множество $M \subseteq P_\Sigma$ называется **базисом**, если любое собственное подмножество $M$ не полно.

Теорема 5. *$\mathcal{P}_\Sigma$ содержит базис тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_\Sigma$ конечно-порожденная.*

Теорема 6. *Мощность минимального базиса в $\mathcal{P}_\Sigma$ равна $|\Sigma_2|$.*

Теорема 7. *Мощность множества замкнутых классов в $\mathcal{P}_\Sigma$ равна континууму тогда и только тогда, когда $\Sigma \neq (\{\{a, b\}\}, \{\{a, b\}\})$, где $a \neq b$.*

Замкнутое множество $M \subseteq P_\Sigma$ называется **открыто-замкнутым**, если его дополнение замкнуто. По определению, считаем пустое множество также замкнутым. Опишем все открыто-замкнутые множества в $\mathcal{P}_\Sigma$. Пусть $f \in P_\Sigma$, обозначим через $K_f$ множество всех таких функций $g$ из $P_\Sigma$, что при помощи только отождествления и переименования переменных из $g$ может быть получена функция $f$. Пусть $D = (\bigcup_{i=1}^{s} A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{t} B_j)$. Элементы непустого множества $D$ назовем **абсолютными константами**. Пусть, далее, $Q$ — множество всех таких функций $f$ из $P_\Sigma$, которые зависят только от переменных $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^s$, $Q' \subseteq Q$, и пусть каждое $A_i$ содержит не более одной абсолютной константы; обозначим через $D(Q')$ множество всех функций из $Q'$, которые получаются из функций множества $Q$ путем обязательной подстановки всех абсолютных констант вместо всех возможных переменных*. На множестве $\Sigma_2$ введем отношение эквивалентности $R$ такое, что $B_j \, R \, B_{j'}$ тогда и только тогда, когда $B_j \cap B_{j'} \neq \varnothing$, и пусть $E_1, E_2, \ldots, E_u$ — соответствующие классы эквивалентности.

Теорема 8. *Множество $M \subseteq P_\Sigma$ является открыто-замкнутым тогда и только тогда, когда:*

а) *если каждое $A_i$ содержит не более одной абсолютной константы, то для некоторого множества $S \subseteq D(Q)$*

$$M = \bigcup_{f \in D^{-1}(S)} K_f;$$

б) *если некоторое $A_i$ содержит более одной абсолютной константы, то для некоторого множества $T \subseteq \{1, 2, \ldots, u\}$*

$$M = \bigcup_{r \in T} \bigcup_{B_j \in E_r} P_{B_j}.$$

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
29 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. В. Яблонский, Сборн. Проблемы кибернетики, в. 2, 7 (1959). [2] А. И. Мальцев, Алгебра и логика, 5, в. 2, Новосибирск (1966).

* Далее, если $Q'' \subseteq D(Q)$, то через $D^{-1}(Q'')$ обозначим множество всех тех функций $f$ из $Q$, для которых $D(\{f\}) \subseteq Q''$.