Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 1

УДК 519.217 *МАТЕМАТИКА*

В. И. ПИТЕРБАРГ

СВОЙСТВО СИЛЬНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ КВАНТОВАННОГО ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 XI 1972)

Пусть ξ_n — гауссовский стационарный процесс с дискретным временем, $\mathrm{E}\xi_n=0$, $\mathrm{E}\xi_n^2=1$, $\mathrm{E}\xi_n\xi_{n+\nu}=r(\nu)$. $\mathfrak{M}_t^s(\xi)$ — σ-алгебра событий, порожденных процессом ξ_n при $n\in[t,s]$. Говорят, что ξ_n обладает свойством сильного перемешивания (полной регулярности), если

$$\alpha(\tau)=\sup_{A\in\mathfrak{M}_\tau^\infty,\ B\in\mathfrak{M}_{-\infty}^0}|P(AB)-P(A)P(B)|\to 0\quad\text{при}\quad \tau\to\infty. \tag{1}$$

Оказывается, что условию (1) удовлетворяет довольно узкий класс гауссовских процессов; с другой стороны, известные достаточные условия выполнения (1) сложны для проверки ([1]). Естественно поэтому вместо σ-алгебр $\mathfrak{M}_t^s(\xi)$ рассмотреть более бедные σ-алгебры, которые достаточно полно описывали бы процесс ξ_n (например, с точки зрения приложений) и в то же время свойство (1) было бы для них легко проверяемым.

Пусть u_i, $i=0,\pm1,\dots,$ — действительные числа, $u_i>u_j$ для $i>j$.

Рассмотрим процесс, полученный из ξ_n квантованием по u_i:

$$\eta_n=u_i,\quad\text{если}\quad u_i\leqslant\xi_n<u_{i+1}. \tag{2}$$

Для η_n существуют простые достаточные условия выполнения соотношения (1) в терминах функции $r(\nu)$. Вероятность любого события из $\mathfrak{M}_t^s(\eta)$ можно записать в виде

$$P(\cdot)=\sum_{\mathbf{i}\in I\subseteq H_{s-t+1}}P\{u_{i_1}\leqslant\xi_t<u_{i_1+1},\dots,u_{i_{s-t+1}}\leqslant\xi_s<u_{i_{s-t+1}+1}\}, \tag{3}$$

где H_n — совокупность вектор-индексов $\mathbf{i}=(i_1,\dots,i_n)$.

Пусть $A\in\mathfrak{M}_{t_1}^{s_1}(\eta)$, $B\in\mathfrak{M}_{t_2}^{s_2}(\eta)$, $\infty>s_2>t_2>s_1>t_1>-\infty$, $s_1-t_1+1=n$, $s_2-t_2+1=m$, R_i — матрицы ковариаций векторов $(\xi_{t_i},\dots,\xi_{s_i})$, $i=1,2$, R — матрица ковариаций вектора $(\xi_{t_1},\dots,\xi_{s_1},\dots,\xi_{s_2})$, R_{21}, R_{12} — матрицы взаимных ковариаций векторов $(\xi_{t_i},\dots,\xi_{s_i})$. Для $0\leqslant h\leqslant 1$ матрица $(n+m)\times(n+m)$

$$R(h)=\begin{pmatrix}R_1 & hR_{12}\\ hR_{21} & R_2\end{pmatrix},\qquad R(1)=R,$$

положительно определена, поскольку множество положительно определенных матриц данной размерности выпукло. Через $P_{R(h)}(\cdot)$ и $p_{R(h)}(\cdot)$ обозначим соответственно вероятность и плотность нормального распределения с ковариацией $R(h)$. Рассмотрим функцию

$$P(h)=\sum_{\mathrm{l}\in\Pi\subseteq H_{n+m}} P_{R(h)}\{u_{l_1}\leqslant\xi_{t_1}<u_{l_1+1},\ldots,u_{l_{n+m}}\leqslant\xi_{s_2}<u_{l_{n+m}+1}\},$$

где множество индексов Π соответствует событию AB по формуле (3). Пусть $\rho_{ij}=hr(i-j)$; тогда

$$P(AB)-P(A)P(B)=P(1)-P(0)=$$

$$=\int_0^1\frac{dP(h)}{dh}dh=\int_0^1\sum_{\substack{i\in[t_1,s_1]\\ j\in[t_2,s_2]}}\frac{\partial P(h)}{\partial\rho_{ij}}\frac{d\rho_{ij}}{dh}dh=\sum r(i-j)\int_0^1\frac{\partial P(h)}{\partial\rho_{ij}}dh. \tag{4}$$

Оценим, например, $\partial P(h)/\partial\rho_{1\,n+1}$. Разобьем множество Π на непересекающиеся подмножества

$$\Pi_{ij}=\{\mathrm{l}:l_1=i,\ l_{n+1}=j\}\cap\Pi,\ i,j=0,\pm1,\ldots$$

Множество вектор-индексов из H_{n+m-2}, получающееся из Π_{ij} вычеркиванием в его элементах 1-й и $(n+1)$-й координат, обозначим через Π_{ij}'. Воспользуемся известным соотношением для производной по ρ_{ij} от нормальной плотноости ([2]). Имеем

$$\frac{\partial P(h)}{\partial\rho_{1\,n+1}}=\sum_{i,j}\sum_{\mathrm{l}\in\Pi_{ij}}\frac{\partial}{\partial\rho_{1,n+1}}P_{R(h)}\{u_i\leqslant\xi_{t_1}<u_{i+1},\ldots,u_{l_{n+m}}\leqslant\xi_{t_2}<u_{l_{n+m}+1}\}=$$

$$=\sum_{i,j}\sum_{\mathrm{l}\in\Pi_{ij}}\int_{u_i}^{u_{i+1}}\ldots(n+m)\ldots\int_{u_{l_{n+m}}}^{u_{l_{n+m}+1}}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_{n+1}}p_{R(h)}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=$$

$$=\sum_{\nu,\mu=0,1}(-1)^{\nu+\mu}\sum_{i,j}\sum_{\Pi'_{ij}}p(u_{i+\nu},u_{j+\mu})K(u_{i+\nu},u_{j+\mu}),$$

где

$$K(u_{i+\nu},u_{j+\mu})=\sum_{\Pi'_{ij}}P\{u_{l_2}\leqslant\tilde\xi_{t_1+1}<u_{l_2+1},\ldots,u_{l_{n+m}}\leqslant\tilde\xi_{s_2}<u_{l_{n+m}+1}\},$$

$(\tilde\xi_{t_1+1},\ldots,\tilde\xi_{s_2})$ — $(n+m-2)$-мерный нормальный вектор с математическим ожиданием и ковариацией, полученными из исходного при условии $\xi_{t_1}=u_{i+\nu}$, $\xi_{t_2}=u_{j+\mu}$. $K(u_{i+\nu},u_{j+\mu})$ есть вероятность некоторого события, поэтому $K(u_{i+\nu},u_{j+\mu})\leqslant1$, $p(x,y)$ — двумерная нормальная плотность,

$$p(u_{i+\nu},u_{j+\mu})\leqslant\frac{(1-\rho_{1\,n+1}^2)^{-1/2}}{2\pi}\exp\left\{-\frac14(u_{i+\nu}^2+u_{j+\mu}^2)\right\}.$$

Суммируя все оценки и интегрируя по h, получаем, что

$$\left|\int_0^1\frac{\partial P(h)}{\partial\rho_{1\,n+1}}dh\right|\leqslant\frac{4\arcsin|r(t_2-t_1)|}{2\pi|r(t_2-t_1)|}\sum_{i,j}\exp\left\{-\frac14(u_j^2+u_i^2)\right\}. \tag{5}$$

Из соотношений (4) и (5) следует оценка

$$|P(AB)-P(A)P(B)|\leqslant\frac2\pi\left(\sum_i\exp\left(-\frac14u_i^2\right)\right)^2\sum_{\substack{i\in[t_1,s_1]\\ j\in[t_2,s_2]}}\arcsin|r(i-j)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac4\pi\left(\sum\exp\left(-\frac14u_i^2\right)\right)^2\sum_{n=t_2-s_1}^{\infty}(n-t_2+s_1)|r(n)|. \tag{6}$$

Поскольку оценка (6) равномерна по t_1 и s_2, то из (6) следует

Теорема. *Пусть* ξ_n — *гауссовский стационарный процесс с дискретным временем,* $E\xi_n = 0$, $E\xi_n^2 = 1$, $E\xi_n\xi_{n+\nu} = r(\nu)$. *Если* $\sum^{\infty} n|z(n)| < \infty$, *то процесс* η_n, *полученный из* ξ_n *квантованием по уровням* u_i, $\sum \exp(-{}^1/_4 u_i^2) < \infty$, *обладает свойством сильного перемешивания* (1). *Для коэффициента перемешивания* $\alpha(\tau)$ *справедлива оценка* (6), $\tau = t_2 - s_1$.

Автор признателен Ю. К. Беляеву за постановку задачи.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, Гауссовские случайные процессы, «Наука», 1970. [2] R. L. Plackett, Biometrika, 41, 351 (1954).