

УДК 517.948:518

МАТЕМАТИКА

А. В. КОЗАК

ОБ ОДНОМ ПРОЕКЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 21 XII 1972)

В настоящей работе излагается один проекционный метод решения операторных уравнений в банаховом пространстве. Этот метод позволяет, в частности, аппроксимировать интегральные операторы с ядрами, зависящими от разности аргументов, дискретными операторами с разностными индексами.

1. Через $\mathcal{L}(X, Y)$ обозначим множество линейных ограниченных операторов, определенных в банаховом пространстве X , с областью значений в банаховом пространстве Y .

Рассмотрим уравнение

$$Ax = y, \quad (1)$$

где $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $y \in Y$. Пусть ω — некоторое неограниченное множество положительных чисел, а $\{P_\tau\}$ и $\{Q_\tau\}$, $\tau \in \omega$, — семейства проекторов, действующих соответственно в X и в Y . Пусть далее $A_\tau \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\tau \in \omega$, и $|A_\tau - A| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Будем говорить, что к оператору A применим проекционный метод по системе (P_τ, Q_τ, A_τ) , если, начиная с некоторого τ_0 , для любого $y \in Y$ уравнение

$$Q_\tau A_\tau P_\tau x = Q_\tau y \quad (2)$$

однозначно разрешимо в $P_\tau X$ и при $\tau \rightarrow \infty$ его решение стремится к решению уравнения (1).

В дальнейшем будем предполагать, что выполняются следующие условия:

а) проекторы P_τ и Q_τ при $\tau \rightarrow \infty$ сильно сходятся к единичным операторам;

б) $|Q_\tau A - A P_\tau| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$.

В этом случае справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Если оператор A обратим, то к нему применим проекционный метод по системе (P_τ, Q_τ, A_τ) .

Доказательство. Из условий а) и б) следует, что для любого оператора $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ при $\tau \rightarrow \infty$

$$|(Q_\tau A_\tau P_\tau)(P_\tau B Q_\tau) - Q_\tau A B Q_\tau| \rightarrow 0, \quad (3)$$

$$|(P_\tau B Q_\tau)(Q_\tau A_\tau P_\tau) - P_\tau B A P_\tau| \rightarrow 0. \quad (4)$$

Полагая вместо B оператор A^{-1} , получим, что, начиная с некоторого τ_0 , операторы $Q_\tau A_\tau P_\tau$ обратимы и при $\tau \rightarrow \infty$

$$|(Q_\tau A_\tau P_\tau)^{-1} - P_\tau A^{-1} Q_\tau| \rightarrow 0.$$

Сходимость решения x_τ уравнения (2) к решению x уравнения (1) вытекает из оценки

$$|x_\tau - x| \leq |(Q_\tau A_\tau P_\tau)^{-1} Q_\tau y - P_\tau A^{-1} Q_\tau y| + |P_\tau A^{-1} Q_\tau y - A^{-1} y|. \quad (5)$$

Теорема доказана.

Замечание. Из неравенства (5) следует, что для погрешности $|x_\tau - x|$ имеет место оценка

$$|x_\tau - x| \leq C_1 |P_\tau x - x| + C_2 |A_\tau - A|.$$

Если оператор A не обратим, но является Φ -оператором и одно из его дефектных чисел ($\alpha(A) = \dim \ker A$ или $\beta(A) = \dim \operatorname{coker} A$) равно нулю, то имеют место следующие обобщения теоремы 1.

Через

$$\theta(L, M) = \max \left\{ \sup_{\substack{l \in L \\ |l|=1}} \rho(l, M), \sup_{\substack{m \in M \\ |m|=1}} \rho(m, L) \right\}$$

обозначим раствор подпространств L и M .

Теорема 2. Пусть A является Φ -оператором и $\beta(A) = 0$. Тогда при достаточно больших значениях τ оператор $B_\tau = Q_\tau A_\tau P_\tau$ будет Φ -оператором. Кроме того $\alpha(B_\tau) = \alpha(A)$, $\beta(B_\tau) = 0$ и $\theta(\ker B_\tau, \ker A) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Теорема 2'. Пусть A является Φ -оператором и $\alpha(A) = 0$. Тогда при достаточно больших значениях τ оператор $B_\tau = Q_\tau A_\tau P_\tau$ является Φ -оператором, $\alpha(B_\tau) = 0$, $\beta(B_\tau) = \beta(A)$ и для любого $\operatorname{coker} A$ можно так выбрать $\operatorname{coker} B_\tau$, что $\theta(\operatorname{coker} B_\tau, \operatorname{coker} A) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$.

В условиях теоремы 2 (2') оператор A обратим справа (слева) и обратимость справа (слева) оператора B_τ следует соответственно из соотношений (3) и (4).

Теоремы 1, 2 и 2' допускают обращения в следующем смысле:

Теорема 3. Если при всех $\tau \geq \tau_0$ операторы $Q_\tau A_\tau P_\tau$ обратимы и $|(Q_\tau A_\tau P_\tau)^{-1}| \leq C < \infty$, то оператор A обратим.

Теорема 4. Если при всех $\tau \geq \tau_0$ операторы $Q_\tau A_\tau P_\tau$ обратимы справа, $|(Q_\tau A_\tau P_\tau)^{-1}| \leq C < \infty$ и $\dim \ker Q_\tau A_\tau P_\tau \leq N < \infty$, то оператор A обратим справа и $\dim \ker A \leq N$.

Теорема 4'. Если при всех $\tau \geq \tau_0$ операторы $Q_\tau A_\tau P_\tau$ обратимы слева, $|(Q_\tau A_\tau P_\tau)^{-1}| \leq C < \infty$ и $\dim \operatorname{coker} Q_\tau A_\tau P_\tau \leq N < \infty$, то оператор A обратим слева и $\dim \operatorname{coker} A \leq N$.

2. Многочлен $r(t)$ степени не выше чем n назовем интерполяционным для функции $x \in L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$, если

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} [x(t) - r(t)] dt = 0,$$

где

$$a_k = a + \frac{k}{n+1}(b-a), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Для любого элемента из $L_p(a, b)$ указанный многочлен всегда существует и определяется единственным образом. Операция сопоставления элементу его интерполяционного многочлена степени не выше чем n является проектором в $L_p(a, b)$.

Пусть n — неотрицательное целое число, h — вещественное положительное число. В пространстве $L_p(-\infty, +\infty)$ определим проектор P_h^n следующим образом: $(P_h^n x)(t) = r_k(t)$ при $kh \leq t < (k+1)h$, $k = 0, \pm 1, \dots$, где $r_k(t)$ — интерполяционный многочлен степени не выше чем n для сужения функции $x(t)$ на отрезок $[kh, (k+1)h]$.

При $h \rightarrow 0$ P_h^n сильно сходится к единичному оператору. Причем, если функция $x(t) \in L_p(-\infty, +\infty)$ непрерывно дифференцируема n раз, $x^{(n)}(t)$ абсолютно непрерывна и $x^{(n+1)}(t) \in L_p(-\infty, +\infty)$, то для погрешности $|x - P_h^n x|_{L_p}$ имеет место оценка

$$|x - P_h^n x|_{L_p} \leq \frac{2h^{n+1}}{n!} |x^{(n+1)}|_{L_p}.$$

Обозначим через l_p^n пространство векторов $\{\{x_k^i\}_{i=0}^n\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ с определенным нормой

$$|x|_{l_p^n} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k^i|^p \right)^{1/p}.$$

Элементу $x \in \text{Im } P_h^n$ поставим в соответствие вектор $\tilde{x} \in l_p^n$ с координатами

$$x_k^i = \frac{n}{h} \int_{a_{ki}}^{a_{k,i+1}} x(t) dt, \quad (6)$$

где $a_{ki} = \left(k + \frac{i}{n+1}\right)h$; $i = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, \pm 1, \dots$.

Полученное соответствие является изоморфизмом между $\text{Im } P_h^n$ и l_p^n . В пространстве $L_p(-\infty, +\infty)$ рассмотрим оператор свертки

$$(Ax)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t-s)x(s)ds, \quad (7)$$

где $a \in L_1(-\infty, +\infty)$.

Имеет место следующая

Л е м м а.

$$|AP_h^n - P_h^n A| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0. \quad (8)$$

Нетрудно непосредственно проверить, что (8) выполняется, если $a(t)$ является характеристической функцией интервала (α, β) . Так как линейные комбинации характеристических функций плотны в $L_1(-\infty, +\infty)$, то (8) имеет место для любой функции $a \in L_1(-\infty, +\infty)$.

В силу изоморфизма $\text{Im } P_h^n$ и l_p^n оператору $P_h^n A_h P_h^n$ соответствует некоторый дискретный оператор, действующий в l_p^n . Если в качестве оператора A_h мы возьмем оператор свертки с ядром $a_h = P_h^n a$, то $|A - A_h| \rightarrow 0$. И тогда уравнению

$$P_h^n A_h P_h^n x = P_h^n y$$

будет соответствовать следующее дискретное уравнение типа свертки с матричными коэффициентами:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_{l-k}^{ij} x_k^i = y_l^j, \quad j = 0, 1, \dots, n; l = 0, \pm 1, \dots$$

При этом

$$a_k^{ij} = h \sum_{r=0}^n (a_k^r \alpha_r^{ij} + a_{k-1}^r \beta_r^{ij}),$$

где коэффициенты a_k^r определяются по ядру $a(t)$ с помощью формулы (6), а коэффициенты α_r^{ij} , β_r^{ij} , $i, j, r = 0, 1, \dots, n$, зависят от n и не зависят от $a(t)$.

Через $P_{\pm}$ обозначим следующие проекторы в пространстве $L_p(-\infty, +\infty)$: $(P_{\pm}x)(t) = 1/2(1 \pm \text{sign } t)x(t)$. Проекторы $P_{\pm}$ коммутируют с P_h^n при любом h и n .

Пусть $\omega = (0, +\infty)$, $h = 1/\tau$, $\tau \in \omega$, и $P_{\tau} = Q_{\tau} = P_h^n$. Тогда условия а) и б) п. 1 выполняются для следующих операторов:

1) оператора $I - A$ и оператора Винера — Хопфа $P_+(I - A)P_+$, где A — оператор вида (7);

2) парного оператора $P_+(I - A) + P_-(I - B)$ и транспонированного к нему оператора $(I - A)P_+ + (I - B)P_-$, где A, B — операторы вида (7);

3) матричных аналогов операторов п.п. 1) и 2).

Поэтому для всех указанных операторов справедливы результаты теорем 1—4.

З а м е ч а н и е. Аппроксимирующие операторы являются при $n = 0$ дискретными аналогами исходных интегральных операторов, а при $n > 0$ — системами дискретных операторов типа свертки размерности $m(n+1)$, где m — размерность исходной интегральной системы. Поэтому в совокупности с проекционными методами решения дискретных систем

типа свертки (¹) мы получаем приближенный метод решения интегральных уравнений типа свертки путем сведения их к конечномерным алгебраическим системам.

В заключение выражаю искреннюю благодарность В. Б. Дыбину за руководство работой.

Ростовский государственный
университет

Поступило
15 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, «Наука», 1971.