

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

Э. М. СААК

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком И. Н. Векун 24 X 1972)

В работе устанавливается ограниченность в L_p , $1 < p < \infty$, некоторых ортогональных проекторов. При этом используется метод, который легко понять на приводимом ниже простом доказательстве одной важной и хорошо известной ⁽¹⁾ теоремы М. Рисса.

Теорема (М. Рисс). *Справедливо неравенство*

$$\int_{|t|=1} \left| \int_{|\tau|=1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} \right|^p |dt| \leq M_p \int_{|t|=1} |f(t)|^p |dt|, \quad (1)$$

где M_p , $1 < p < \infty$, не зависит от (комплексной суммируемой) функции $f(t)$ комплексного переменного t , а внутренний интеграл слева понимается в смысле главного значения по Коши.

Доказательство. Рассмотрим пространства H_p (определение см. в ⁽¹⁾). Они рефлексивны. Поэтому тотальная над H_p система функционалов вида

$$\int_{|t|=1} f(t) \overline{\varphi(t)} |dt|, \quad \text{где } f \in H_p, \quad \varphi \in H_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

образует плотное множество в сопряженном к H_p пространстве H_p^* . Следовательно, H_q изоморфно H_p^* .

Положим

$$L_p = \left\{ f(t): \int_{|t|=1} |f(t)|^p |dt| < \infty \right\},$$

$$Kf(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t}, \quad |t| < 1.$$

Нетрудно убедиться, что оператор K ортогонально проектирует L_2 на H_2 . В силу доказанного изоморфизма H_q^* и H_p , $1/p + 1/q = 1$, имеем теперь

$$\int_{|t|=1} f(t) \overline{\varphi(t)} |dt| = \int_{|t|=1} Kf(t) \overline{\varphi(t)} |dt|,$$

где $f(t) \in L_p$, а $\varphi(t)$ — произвольный элемент из H_q . При этом $Kf \in H_p$ и

$$\left\{ \int_{|t|=1} |Kf(t)|^p |dt| \right\}^{1/p} \leq N_p \left\{ \int_{|t|=1} |f(t)|^p |dt| \right\}^{1/p},$$

где N_p — норма вышеуказанного изоморфизма. Этим (1) доказано.

Следующая теорема является n -мерным аналогом теоремы М. Рисса.

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$\int_{|t_1|=r_1} \dots \int_{|t_n|=r_n} \left| \int_{|\tau_1|=1} \dots \int_{|\tau_n|=1} f(\tau) \frac{d\tau_1 \dots d\tau_n}{(\tau_1 - t_1) \dots (\tau_n - t_n)} \right|^p |dt_1| \dots |dt_n| \leq M_{p,n} \int_{|t_1|=1} \dots \int_{|t_n|=1} |f(t)|^p |dt_1| \dots |dt_n|, \quad (2)$$

где $t = (t_1, \dots, t_n)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ — комплексные векторы, $n \geq 1$, $1 < p < \infty$, $M_{p,n}$ не зависит от $f(t)$ и чисел $r_1, \dots, r_n$; $0 < r_1 < 1, \dots, 0 < r_n < 1$.

Доказательство. Рассмотрим пространства $H_{p,n}$ аналитических в полидиске $|t_1| < 1, \dots, |t_n| < 1$ функций $\varphi(t)$ комплексных переменных $t_1, \dots, t_n$ с нормой

$$\|\varphi\|_{p,n} = \sup_{0 < r_j < 1} \left\{ \int_{|t_1|=r_1} \dots \int_{|t_n|=r_n} |f(t)|^p |dt_1| \dots |dt_n| \right\}^{1/p}.$$

Эти пространства рефлексивны, как подпространства рефлексивных пространств

$$L_{p,n} = \left\{ f(t) : \int_{|t_1|=1} \dots \int_{|t_n|=1} |f(t)|^p |dt_1| \dots |dt_n| < \infty \right\}.$$

Рассуждая, как выше, установим изоморфизм $H_{q,n}$ и $H_{p,n}^*$, $1/p + 1/q = 1$, где $H_{p,n}^*$ есть сопряженное пространство к $H_{p,n}$.

Оператор K_n ,

$$K_n f(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\tau_1|=1} \dots \int_{|\tau_n|=1} f(\tau) \frac{|d\tau_1| \dots |d\tau_n|}{(1 - \bar{\tau}_1 t_1) \dots (1 - \bar{\tau}_n t_n)},$$

ортогонально проектирует $L_{2,n}$ на $H_{2,n}$. Это следует из того, что $K_n f$ есть ряд Фурье по ортонормированной в L_2 системе функций

$$\left\{ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} t_1^{K_1} \dots t_n^{K_n} \right\}_{K_1, \dots, K_n=0}^{\infty}.$$

Но оператор K_n можно записать также в виде

$$K_n f(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\tau_1|=1} \dots \int_{|\tau_n|=1} f(\tau) \frac{d\tau_1 \dots d\tau_n}{(\tau_1 - t_1) \dots (\tau_n - t_n)}.$$

Поэтому неравенство (2) следует из изоморфизма между $H_{q,n}$ и $H_{p,n}^*$.

Теорема 2. *Справедливо неравенство*

$$\int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} f(\tau) \prod_{v=1}^n \frac{r_v^2}{(t_v^2 - \bar{\tau}_v t_v)^2} d\Omega_{\tau} \right|^p d\Omega_t \leq M_{p,n} \int_{\Omega} |f(t)|^p d\Omega_t, \quad (3)$$

где $\Omega = \{|t_v| < r_v; v = 1, \dots, n\}$ — поликруг, интегрирование происходит по мере Лебега (индексы t и τ указывают переменную интегрирования) $M_{p,n}$ не зависит от $f(t)$, $1 < p < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим пространства $H'_{p,n}$ аналитических в поликруге Ω функций $\varphi(t)$ комплексных переменных $t_1, \dots, t_n$ с нормой

$$\|\varphi\|_{p,n}' = \left\{ \int_{\Omega} |\varphi(t)|^p d\Omega_t \right\}^{1/p}.$$

Пространства $H'_{p,n}$ рефлексивны, как подпространства пространства $L_p(\Omega)$, состоящего из всех комплексных суммируемых по Ω в p -й степени

функций $f(t)$ с той же нормой. Поэтому $H_{q,n}'$, изоморфно сопряженному к $H_{p,n}'$, $1/p + 1/q = 1$, пространству $[H_{p,n}']^*$. (Изоморфизм пространства $[H_{p,1}']^*$ и $H_{q,1}$ был установлен ранее другим путем В. П. Захарютой и В. И. Юдовичем ⁽²⁾.) Оператор P

$$Pf(t) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\Omega} f(\tau) \prod_{v=1}^n \frac{r_v^2}{(r_v^2 - \bar{\tau}_v t_v)^2} d\Omega_{\tau}$$

ортогонально проектирует $L_2(\Omega)$ на $H_{2,n}'$ (см. ⁽³⁾, стр. 556). Поэтому неравенство (3) следует из изоморфизма между $[H_{p,n}]^*$ и $H_{q,n}'$.

Теорема 3. *Справедливо неравенство*

$$\int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} f(\tau) \frac{d\Omega_{\tau}}{\left(1 - \sum_{v=1}^n \bar{\tau}_v t_v\right)^{n+1}} \right|^p d\Omega_t \leq M_{p,n} \int_{\Omega} |f(t)|^p d\Omega_t,$$

где $\Omega = \{|t_1|^2 + \dots + |t_n|^2 < 1\}$ — шар, $M_{p,n}$ не зависит от $f(t)$, $1 < p < \infty$.
Доказательство. Оператор Q ,

$$Qf(t) = \frac{n!}{\pi^n} \int_{\Omega} f(\tau) \frac{d\Omega_{\tau}}{\left(1 - \sum_{v=1}^n \bar{\tau}_v t_v\right)^{n+1}},$$

ортогонально проектирует пространство $L_2(\Omega)$ на его подпространство, состоящее из аналитических в Ω функций (⁽³⁾, стр. 557). Дальнейшие рассуждения вполне аналогичны доказательству предыдущих теорем.

Изучим теперь ортогональные проекторы, соответствующие областям, отличным от канонических. При этом ограничимся плоским случаем ($n = 1$).

Пусть Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана по плоскости комплексного переменного z . Обозначим через $\vartheta(z)$ угол между положительным направлением вещественной оси и касательной в точке z к кривой Γ (ориентированной обычным образом), меняющийся непрерывно всюду, кроме угловых точек, в которых его скачок заключен между $-\pi$ и π . Положим

$$\alpha = \min_{\Gamma} (\vartheta(z + 0) - \vartheta(z - 0)),$$

где $\vartheta(z + 0)$ ($\vartheta(z - 0)$) означает предел со стороны последующих (соответственно предшествующих) значений $z \in \Gamma$.

Положим еще

$$L_p(\Gamma) = \left\{ f(z): \int_{\Gamma} |f(z)|^p |dz| < \infty \right\}$$

и введем норму в $L_p(\Gamma)$ обычным образом.

Рассмотрим оператор Π ,

$$\Pi f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{\sqrt{\varphi'(\zeta)} \sqrt{\varphi'(z)}}{1 - \varphi(\zeta) \varphi(z)} |d\zeta|,$$

где $f \in L_p(\Gamma)$, а $t = \varphi(z)$ есть конформное отображение внутренности Ω кривой Γ на круг $|t| < 1$, $z \in \Omega$.

Теорема 4. *Оператор Π ограничен в $L_p(\Gamma)$ при $1 < p < 2(1 + \pi/|\alpha|)$ и неограничен при $p > 2(1 + \pi/|\alpha|)$.*

Доказательство. Положим

$$E_p = \{f(z): f(\psi(t)) [\psi'(t)]^{1/p} \in H_p\},$$

где $\psi(t)$ — обратное отображение к $\varphi(z)$, и введем в E_p норму из $L_p(\Gamma)$. Пространства E_p рефлексивны. Оператор Π ортогонально проектирует $L_2(\Gamma)$ на E_2 . Пользуясь этим, можно показать, что ограниченность Π в $L_p(\Gamma)$ имеет место в том и только в том случае, если

$$\int_{\Gamma} |\varphi'(\zeta)^{p/2}| d\zeta < \infty.$$

Согласно результатам работы автора (⁴), последнее неравенство выполняется при $1 < p < 2(1 + \pi/|\alpha|)$ и не выполняется при $p > 2(1 + \pi/|\alpha|)$.

Теорема доказана.

Таганрогский радиотехнический
институт

Поступило
13 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1, М., 1965. ² В. П. Захарюта, В. И. Юдович, УМН, 19, 2, 139 (1964). ³ Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ, М., 1969. ⁴ Э. М. Саак, Сообщ. на 1-й конфер. Ростовск. матем. общ., Ростов-на-Дону, 1967, стр. 37.