Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 1

ФИЗИКА

А. Г. СИТЕНКО

СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕЛИНЕЙНЫМИ ВОСПРИИМЧИВОСТЯМИ И ФЛУКТУАЦИЯМИ В ПЛАЗМЕ

(Представлено академиком Б. Б. Кадомцевым 10 X 1972)

1. Электродинамические свойства любой материальной среды определяются электрической восприимчивостью, устанавливающей в общем случае нелинейную связь между поляризацией и напряженностью поля в среде. В случае достаточно слабых полей поляризацию можно разложить по степеням напряженности поля и ограничиться учетом линейного слагаемого. Такое приближение соответствует линейной электродинамике, в которой электродинамические свойства среды описываются линейной восприимчивостью, зависящей при наличии пространственно-временной дисперсии от частоты и волнового вектора. Для описания нелинейных эффектов необходимо учесть следующие члены в разложении поляризации по степеням напряженности поля, а соответствующие коэффициенты разложения рассматривать в качестве нелинейных восприимчивостей различного порядка. Очевидно, нелинейные восприимчивости будут зависеть от частот и волновых векторов всех взаимодействующих волн. Электродинамические свойства среды с учетом нелинейных эффектов будут полностью определяться заданием как линейной, так и всех нелинейных восприимчивостей.

В линейной электродинамике флуктуационно-диссипативное соотношение устанавливает связь между флуктуациями различных величин и электродинамическими свойствами среды. Поэтому, зная спектр флуктуаций, путем обращения флуктуационно-диссипативного соотношения можно определить электрическую восприимчивость ([1]). В случае плазмы линейная электрическая восприимчивость полностью определяется заданием парной корреляционной функции для флуктуаций плотности заряда, вычисленной в пренебрежении взаимодействием между частицами. В настоящей статье мы рассмотрим обобщение флуктуационно-диссипативного соотношения на нелинейный случай и покажем, что нелинейные восприимчивости выражаются через корреляционные функции высших порядков для флуктуаций плотности заряда в пренебрежении взаимодействием между частицами и, следовательно, задание последовательности таких корреляционных функций полностью определяет линейные и нелинейные электродинамические свойства плазмы.

2. Для вывода основного уравнения нелинейной электродинамики плазмы удобно воспользоваться уравнением Власова с самосогласованным полем. Ради простоты ограничимся рассмотрением потенциального электрического поля и будем предполагать, что плазма однородна и стационарна. В этом случае основное динамическое уравнение для поля можно записать в виде *

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k})\,\varphi_{\mathbf{k}\omega} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\omega', \mathbf{k}', \ldots, \omega^{(n-1)}, \mathbf{k}^{(n-1)}} \varkappa^{(n)}(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}'; \ldots; \omega^{(n-1)}, \mathbf{k}^{(n-1)}) \times \varphi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} \varphi_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}'', \omega'-\omega''} \ldots \varphi_{\mathbf{k}^{(n-1)}\omega^{(n-1)}} = -\frac{4\pi}{k^2} \overset{0}{\rho}_{\mathbf{k}\omega}, \tag{1}$$

* Нелинейные восприимчивости для плазмы ранее вводились в работах ([2–5]).

где $\varphi_{k\omega}$ — пространственно-временная компонента Фурье потенциала поля ($\mathbf{k}$ — волновой вектор, ω — частота); $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ — диэлектрическая проницаемость плазмы, связанная с линейной восприимчивостью $\varkappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$ соотношением $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \varkappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$, $\varkappa^{(n)}(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}'; \ldots; \omega^{(n-1)}, \mathbf{k}^{(n-1)})$ — нелинейная электрическая восприимчивость n-го порядка ($n \geqslant 2$) и $\rho_{\mathbf{k}\omega}{}^0$ — плотность сторонних зарядов в плазме.

Обозначая стационарную функцию распределения через $f_0(\mathbf{v})$ ($\mathbf{v}$ — скорость отдельной частицы), нетрудно получить следующее выражение для электрических восприимчивостей плазмы:

$$\varkappa^{(n)}(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}'; \ldots; \omega^{(n-1)}, \mathbf{k}^{(n-1)}) =$$
$$= \sum \frac{(-e)^{n-1}}{m^{n-1}} \frac{\Omega^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{1}{\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v} + i0} (\mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\ldots \left(\frac{1}{\omega^{(n-1)} - \mathbf{k}^{(n-1)}\mathbf{v} + i0} \mathbf{k}^{(n-1)} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right) \ldots \right) \right); \tag{2}$$

знак суммы означает суммирование по различным сортам частиц плазмы.

Отметим, что нелинейные восприимчивости, в отличие от линейной, являются размерными величинами. Размерность нелинейной восприимчивости $\varkappa^{(n)}(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}'; \ldots; \omega^{(n-1)}, \mathbf{k}^{(n-1)})$ равна обратной размерности потенциала $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$ в степени $(n-1)$.

3. В линейном приближении электродинамические свойства равновесной плазмы полностью определяются заданием диэлектрической проницаемости. Если плазма находится в состоянии термодинамического равновесия, то имеет место флуктуационно-диссипативное соотношение, согласно которому флуктуации поля и плотности заряда в плазме выражаются через диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$.

Обращая флуктуационно-диссипативное соотношение, нетрудно выразить мнимую часть линейной электрической восприимчивости $\mathrm{Im}\,\varkappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$ через спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в пренебрежении взаимодействием между частицами $\langle\rho^2\rangle_{\mathbf{k}\omega}{}^0$:

$$\mathrm{Im}\,\varkappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2\pi}{k^2} \frac{\omega}{T} \langle\rho^2\rangle^0_{\mathbf{k}\omega}. \tag{3}$$

Это соотношение совместно с дисперсионным соотношением Крамерса — Кронига

$$\varkappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\varkappa^{(1)}_{\omega'}(\mathbf{k})}{\omega' - \omega - i0}, \quad \varkappa^{(1)}_{\omega}(\mathbf{k}) \equiv 2\mathrm{Im}\,\varkappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k}), \tag{4}$$

полностью определяет линейную электрическую восприимчивость плазмы в равновесном состоянии.

Флуктуационно-диссипативное соотношение допускает обобщение на случай неравновесной (но находящейся в стационарном устойчивом состоянии) плазмы ([6]). Обращение обобщенного флуктуационно-диссипативного соотношения в этом случае имеет вид

$$\varkappa^{(1)}_{\omega}(\mathbf{k}) = -\frac{4\pi}{m} \frac{\partial}{\partial\omega} \langle\rho^2\rangle^0_{\mathbf{k}\omega}. \tag{5}$$

Соотношение (5) совместно с (4) определяет линейную электрическую восприимчивость неравновесной плазмы. Однако для описания флуктуаций в неравновесной плазме (в отличие от равновесного случая) задания электрической восприимчивости оказывается недостаточно. Спектральное распределение флуктуаций поля в неравновесной плазме выражается не только через диэлектрическую проницаемость, но и через спектральное распределение флуктуаций плотности заряда невзаимодействующих частиц:

$$\langle\varphi^2\rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{16\pi^2}{k^4} \frac{\langle\rho^2\rangle^0_{\mathbf{k}\omega}}{|\,\varepsilon(\omega, \mathbf{k})\,|^2}. \tag{6}$$

Следовательно, в неравновесных условиях диэлектрическая проницаемость не описывает полностью электрические свойства плазмы. Такое описание, однако, дается заданием спектрального распределения для флуктуаций плотности заряда невзаимодействующих частиц $\langle\rho^2\rangle_{\mathbf{k}\omega}{}^0$, через которое непосредственно выражается как диэлектрическая проницаемость неравновесной плазмы, так и спектральное распределение флуктуаций в такой плазме.

4. Введенное спектральное распределение флуктуаций $\langle\rho^2\rangle_{\mathbf{k}\omega}$ представляет собой пространственно-временное преобразование Фурье от парной корреляционной функции, которая определяется как статистическое среднее произведения флуктуаций плотности заряда в двух различных точках пространства в различные моменты времени:

$$\langle\rho(\mathbf{r}, t)\rho(\mathbf{r}', t')\rangle \equiv \langle\rho^2\rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t'}. \tag{7}$$

Кроме парной корреляционной функции $\langle\rho^2\rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t'}$ можно ввести также корреляционные функции высших порядков: тройную, четвертную и т. д.:

$$\langle\rho(\mathbf{r}, t)\rho(\mathbf{r}', t')\rho(\mathbf{r}'', t'')\rangle \equiv \langle\rho^3\rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t';\ \mathbf{r}'-\mathbf{r}'',\ t'-t''},$$
$$\langle\rho(\mathbf{r}, t)\rho(\mathbf{r}', t')\rho(\mathbf{r}'', t'')\rho(\mathbf{r}''', t''')\rangle \equiv \langle\rho^4\rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t';\ \mathbf{r}'-\mathbf{r}'',\ t'-t'';\ \mathbf{r}''-\mathbf{r}''',\ t''-t'''}, \ldots \tag{8}$$

В случае парного взаимодействия между частицами корреляционные функции высших порядков, так же как и парная корреляционная функция, выражаются через одночастичную функцию распределения и условную вероятность перехода. Для неограниченной системы в отсутствие взаимодействия между частицами спектральное представление корреляционной функции n-го порядка определяется выражением

$$\langle\rho^n\rangle^0_{\mathbf{k}_1\omega_1;\mathbf{k}_2\omega_2;\ldots;\mathbf{k}_{n-1}\omega_{n-1}} =$$
$$= (2\pi)^{n-1}e^n n_0\int d\mathbf{v}\,\delta(\omega_1-\mathbf{k}_1\mathbf{v})\,\delta(\omega_2-\mathbf{k}_2\mathbf{v})\ldots\delta(\omega_{n-1}-\mathbf{k}_{n-1}\mathbf{v})\,f_0(\mathbf{v}). \tag{9}$$

5. Корреляционные функции высших порядков для флуктуаций плотности заряда невзаимодействующих частиц можно связать с нелинейными восприимчивостями плазмы, рассматривая нелинейную диссипацию энергии в плазме. Дисперсионное соотношение, выражающее принцип причинности, для нелинейной восприимчивости n-го порядка можно записать в виде

$$\chi^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \ldots; \omega_n, \mathbf{k}_n) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_1'\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_2'\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_n'\,\frac{\varkappa^{(n)}_{\omega_1'\omega_2'\ldots\omega_n'}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n)}{(\omega_1'-\omega_1-i0)(\omega_2'-\omega_2-i0)\ldots(\omega_n'-\omega_n-i0)}, \tag{10}$$

где $\varkappa^{(n)}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n)$ непосредственно выражается через корреляционную функцию $(n+1)$-го порядка для флуктуаций плотности заряда невзаимодействующих частиц $\langle\rho^{n+1}\rangle^0_{\mathbf{k}_1\omega_1;\ \mathbf{k}_2\omega_2;\ \ldots;\ \mathbf{k}_n\omega_n}$:

$$\varkappa^{(n)}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n) = L^{(n)}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n)\langle\rho^{n+1}\rangle^0_{\mathbf{k}_1\omega_1;\mathbf{k}_2\omega_2;\ldots;\mathbf{k}_n\omega_n}; \tag{11}$$

$L^{(n)}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n)$ — дифференциальный оператор n-го порядка по переменным $\omega_1, \omega_2, \ldots$ и ω_n, зависящий от параметров $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots,$ и $\mathbf{k}_n$.

$$L^{(n)}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n) = -\frac{4\pi}{m^n k_1^2}\mathbf{k}_1(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\frac{\partial}{\partial\omega_1}\Big[\mathbf{k}_1(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\frac{\partial}{\partial\omega_1}+$$

$$+ \mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \frac{\partial}{\partial \omega_2} \Big] \Big[\mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \mathbf{k}_3 (\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \frac{\partial}{\partial \omega_3} \Big] \ldots$$

$$\ldots \Big[\mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_{n-1} - \mathbf{k}_n) \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_{n-1} - \mathbf{k}_n) \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \ldots + \mathbf{k}_{n-1} (\mathbf{k}_{n-1} - \mathbf{k}_n) \frac{\partial}{\partial \omega_{n-1}} \Big] \times$$

$$\times \left(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_n \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_n \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \ldots + \mathbf{k}_n^2 \frac{\partial}{\partial \omega_n} \right). \tag{12}$$

Согласно (10) и (11), электродинамические (линейные и нелинейные) свойства плазмы полностью определяются, если задана последовательность корреляционных функций различных порядков для флуктуаций плотности заряда в пренебрежении взаимодействием между частицами. Очевидно, соотношения (10) и (11) можно рассматривать в качестве обобщения флуктуационно-диссипативного соотношения для случая нелинейной электродинамической среды.

Институт теоретической физики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
25 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, Харьков, 1965. [2] А. Г. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез, 5, 20 (1965). [3] В. Coppi, M. N. Rosenbluth, R. N. Sudan, Ann. Phys., 55, 207 (1969). [4] Л. М. Горбунов, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, ЖЭТФ, 47, 1437 (1964). [5] В. П. Силин, Введение в кинетическую теорию газов, «Наука», 1971. [6] А. Г. Ситенко, Укр. физ. журн., 11, 1161 (1966).