

УДК 513.832/.835

МАТЕМАТИКА

В. В. ЛЫЧАГИН

ЛОКАЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 7 VIII 1972)

В этой заметке дается локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка на основе предложенного А. М. Виноградовым принципа классификации дифференциальных уравнений. В дальнейшем мы используем определения и результаты статьи (1).

Под нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка мы будем понимать гладкое подмногообразие $V \subset J^1M$, $\text{codim } V = 1$. Многочисленными решениями этого уравнения являются R -многообразия, лежащие в V .

Пусть $\pi_1: J^1M \rightarrow T^*M$ — естественная проекция, соответствующая разложению $\mathcal{F}^1 = \Lambda^1 \oplus \mathcal{F}^0$ (см. (1)), тогда каждое R -многообразие $L \subset J^1M$ локально диффеоморфно проектируется в T^*M и определяет лагранжево многообразие $\bar{L} = \pi_1(L) \subset T^*M$, на котором $\rho|_L = df$, $f \in C^\infty(\bar{L})$, где форма $\rho \in \Lambda^1(T^*M)$ в соответствующих локальных координатах $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots$

$\dots, p_n)$ имеет вид $\rho = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$. Верно и обратное: каждое лагранжево многообразие $\bar{L} \subset T^*M$, на котором $\rho|_{\bar{L}} = df$, определяет такое R -многообразие $L \subset J^1M$, $L = \{(x, f(x)), x \in \bar{L}\}$, что $\pi_1(L) = \bar{L}$.

U_1 -диффеоморфизмы, т. е. диффеоморфизмы J^1M , сохраняющие классифицирующий элемент $U_1 \in \Lambda^1(J^1M)$ (напомним, что $U_1 = du - p dq$ в соответствующих локальных координатах J^1M), являются поднятиями канонических диффеоморфизмов T^*M , имеющих производящую функцию. Пусть $\alpha: T^*M \rightarrow T^*M$ — такой диффеоморфизм и $S_\alpha \in C^\infty(T^*M)$ — производящая функция α , т. е. $\alpha^*(\rho) - \rho = dS_\alpha$. Поднятие $\bar{\alpha}: J^1M \rightarrow J^1M$ определим следующим образом: $\bar{\alpha}(x, u) = (\alpha(x), u + S_\alpha(x))$, $x \in T^*M$, $u \in R^1$, $(x, u) \in J^1M$. Легко проверяется, что $\bar{\alpha}$ — U_1 -диффеоморфизм и, кроме того, любой U_1 -диффеоморфизм можно представить в виде $\bar{\alpha}$ для некоторого канонического диффеоморфизма α .

Уравнения $V_1 \subset J^1M$ и $V_2 \subset J^1M$ локально эквивалентны (U_1 -эквивалентны) в точках $x_1 \in V_1$ и $x_2 \in V_2$, если существуют окрестности $O_1 \ni x_1$, $O_2 \ni x_2$ и классифицирующий (= контактный) диффеоморфизм (U_1 -диффеоморфизм) $\beta: O_1 \rightarrow O_2$, $\beta(x_1) = x_2$ такой, что $\beta(V_1 \cap O_1) = V_2 \cap O_2$.

Теорема 1. а) Если ограничение $\pi_1: J^1M \rightarrow T^*M$ на V_i является диффеоморфизмом в некоторых окрестностях точек $x_i \in V_i$, $i = 1, 2$, и $\omega_i|_{x_i} \neq 0$, где $\omega_i = U_1|_{V_i}$, то уравнения $V_1 \subset J^1M$ и $V_2 \subset J^1M$ локально U_1 -эквивалентны в точках x_i .

б) если $\omega_i|_{x_i} \neq 0$, то уравнения $V_1 \subset J^1M$ и $V_2 \subset J^1M$ локально эквивалентны в точках x_i .

Отметим, что из теоремы 1 следует, что множество многозначных решений уравнения $V \subset J^1M$ в окрестности точки x , $\omega|_x \neq 0$, локально устроено так же, как и уравнения $u = 0$, если последнее рассматривать как уравнения первого порядка в окрестности точки (q, p, u) , $p \neq 0$, где $(q, p, u) -$

естественные локальные координаты в J^1M . Поэтому это множество решений эквивалентно множеству лагранжевых многообразий $L \subset T^*M$, $\rho|_L = 0$, лежащих в окрестности точки (q, p) , $p \neq 0$.

Рассмотрим следующий вопрос: когда существует обычное решение уравнения $V \subset J^1M$, проходящее через точку $x \in V$. Для этого обозначим $S(x)$ вектор, косоортogonalный относительно формы $d\omega|_x$ подпространству нулей формы $\omega|_x$, $\omega|_x \neq 0$. Из теоремы 1 непосредственно следует, что для существования обычного решения уравнения $V \subset J^1M$ необходимо и достаточно, чтобы $\pi_*(S(x)) \neq 0$, где $\pi: J^1M \rightarrow M$ — естественная проекция.

Рассмотрим случай, когда точки $x_i \in V_i$ таковы, что $\omega_i|_{x_i} = 0$, $i = 1, 2$. В точках x_i можно определить «гессиан» формы ω_i , как билинейную форму $H_{\omega_i}(X, Y) = \bar{X}\omega(\bar{Y})|_{x_i}$, $X, Y \in T_{x_i}(V_i)$, а векторные поля $\bar{X}, \bar{Y}$ являются произвольными продолжениями X и Y соответственно, т. е. $\bar{X}_{x_i} = X$, $\bar{Y}_{x_i} = Y$. Из формулы

$$d\omega_i(\bar{X}, \bar{Y})|_{x_i} = \bar{X}\omega_i(\bar{Y})|_{x_i} - \bar{Y}\omega_i(\bar{X})|_{x_i} \quad (1)$$

непосредственно следует, что билинейная форма $H_{\omega_i}(X, Y)$ определена корректно.

Легко видеть, что формы $d\omega$ в точках x_i ($\omega_i|_{x_i} = 0$) имеют максимальный ранг, а поэтому билинейная форма $H_{\omega_i}(X, Y)$ определяет оператор $H_i: T_{x_i}(V_i) \rightarrow T_{x_i}(V_i)$, $d\omega_i(H_i X, Y) = H_{\omega_i}(X, Y)$.

Для локальной U -эквивалентности уравнений $V_i \subset J^1M$ в точках x_i необходима симплектическая эквивалентность форм $H_{\omega_i}(X, Y)$, или, что то же самое, операторов H_i . Вместо билинейных форм $H_{\omega_i}(X, Y)$ можно рассмотреть симметрические формы $H_{\omega_i}^s(X, Y) = 1/2(H_{\omega_i}(X, Y) + H_{\omega_i}(Y, X))$; из формулы (1) следует, что $H_{\omega_i}^s(X, Y) - H_{\omega_i}^s(X, Y) = 1/2 d\omega_i(X, Y)$, т. е. задача симплектической классификации билинейных форм H_{ω_i} эквивалентна классификации квадратичных форм относительно группы симплектических преобразований.

Заметим, что так как любую симметрическую форму можно реализовать в виде $H_{\omega}^s(X, Y)$ для некоторого уравнения $V \subset J^1M$, то локальная U -классификация в точках $x_i \in V_i$, $\omega_i|_{x_i} = 0$ не является дискретной.

Аналогично для локальной эквивалентности уравнений необходима эквивалентность форм $H_{\omega}^s(X, Y)$ относительно следующего действия конформно-симплектической группы $CSp(2n)$: $A(H_{\omega}) = \lambda_A^{-1} A^*(H_{\omega})$, где $A^*(d\omega) = \lambda_A d\omega$. Итак, орбита $[H_{\omega}]$ ($[H_{\omega}]_U$) формы H_{ω} относительно таким образом определенного действия конформно-симплектической группы (симплектической группы) является инвариантом задачи локальной классификации (U -классификации) в случае, когда $\omega|_x = 0$.

Обратимся теперь к вопросу о достаточности инварианта $[H_{\omega}]$ ($[H_{\omega}]_U$). Для этого рассмотрим форму $\theta = \text{pr}_1^* \omega_1 - \text{pr}_2^* \omega_2$ на $V_1 \times V_2$, где $\text{pr}_i: V_1 \times V_2 \rightarrow V_i$ — проекция на i -й сомножитель, $i = 1, 2$. Форма $d\theta$ определяет каноническую структуру на некоторой окрестности $u_1 \times u_2 \subset V_1 \times V_2$. График $L_0 \subset T_{(x_1 \times x_2)}(V_1 \times V_2)$ симплектического преобразования $F: T_{x_1}(V_1) \rightarrow T_{x_2}(V_2)$, переводящего форму H_{ω_2} в H_{ω_1} , как легко видеть, является лагранжевым подпространством в $T_{(x_1 \times x_2)}(V_1 \times V_2)$, $(d\theta|_{L_0} = 0)$ таким, что $H_{\theta}|_{L_0} = 0$. Вопрос о достаточности инварианта $[H_{\omega}]_U$ эквивалентен задаче продолжения линейного преобразования $F: T_{x_1}(V_1) \rightarrow T_{x_2}(V_2)$, $F^*(H_{\omega_2}) = H_{\omega_1}$, до диффеоморфизма, переводящего ω_2 в ω_1 .

Иначе, говоря, нужно выяснить, существует ли такое лагранжево подмногообразие $W \subset U_1 \times U_2$, которое касается L_0 и на котором $\theta|_W = 0$.

Если рассмотреть $U_1 \times U_2$ как подмногообразие в $J^1(M \times M)$, на котором $U_1|_{U_2 \times U_2} = 0$, то вопрос о достаточности сведется к задаче существования локального решения уравнения первого порядка $V \subset J^1N$, касающегося в точке x заданного лагранжева подпространства L_0 , $\omega|_x = 0$, $H_\omega|_{L_0} = 0$. Условие $H_\omega|_{L_0} = 0$, как легко видеть, эквивалентно инвариантности лагранжева подпространства L_0 относительно оператора $H: T_x(V) \rightarrow T_x(V)$.

Заметим, что наличие лагранжева подпространства $L_0 \subset T_x(V)$, на котором $H_\omega|_{L_0} = 0$ ($H_\omega^s|_{L_0} = 0$) или $H: L_0 \rightarrow L_0$, является необходимым для существования решения, проходящего через точку $x \in V$.

Назовем R -многообразия L_1 и L_2 эквивалентными в точке $x \in J^1M$, если L_1 и L_2 имеют в точке x касание порядка $\geq s$. Множество классов s -эквивалентных в точке $x \in V \subset J^1M$ R -многообразий, представители которых имеют с уравнением $V \subset J^1M$ в точке x касание порядка $\geq s$, обозначим V_x^s . Пусть $\Pi_s: V_x^s \rightarrow V_x^{s-1}$ — естественная проекция. Заметим, что если рассматривать R -многообразия, без особенностей проектирующиеся на M , то множество $\bigcup_{x \in V} V_x^s$, которое естественным образом можно считать лежащим в $J^{s+1}(M)$, в линейном случае совпадает с s -м продолжением уравнения $V \subset J^1M$ (см. (2)).

Предложение. Пусть $V \subset J^1M$ — дифференциальное уравнение первого порядка, $\omega|_x = 0$, $x \in V$. Для существования последовательности $x_s \in V_x^s$, $\Pi_s(x_s) = x_{s-1}$, $x_1 = x_1^0$, где $x_1^0 \in V_{x_1}^1$ — точка, определяемая лагранжевым подпространством $L_0 \subset T_x(V)$, $H_\omega|_{L_0} = 0$, достаточно, чтобы собственные числа $\{\lambda_i\}$ оператора $H: L_0 \rightarrow L_0$ удовлетворяли условию

$$\sum t_i \lambda_i \neq 1, \quad (2)$$

где $\sum t_i \geq 3$, t_i — натуральные числа.

Очевидно, что каждое решение L уравнения $V \subset J^1M$, проходящее через точку $x \in V$ и касающееся L_0 , определяет описанную выше последовательность $x_s \in V_x^s$, наличие которой является необходимым условием существования такого решения. Условия (2) не являются необходимыми для существования последовательности x_s , однако при невыполнении их инвариант $[H_\omega]$ недостаточен.

Теорема 2. а) Для локальной эквивалентности (U_1 -эквивалентности) уравнений $V_i \subset J^1M$ в точках $x_i \in V_i$, $\omega_i|_{x_i} = 0$, $\omega_i = U_1|_{\bullet_i}$, $i = 1, 2$, необходима конформно-симплектическая (симплектическая) эквивалентность операторов H_i ; это условие достаточно, если собственные числа операторов H_i удовлетворяют (2).

б) Если собственные числа оператора H_1 удовлетворяют условию (2), то для произвольного подпространства $L_0 \subset T_{x_1}(V_1)$, $H_{\omega_1}|_{L_0} = 0$, существует решение L уравнения $V_1 \subset J^1M$, касающееся L_0 .

Замечание 1. Пусть $F_i \in C^\infty(T^*M)$ таковы, что $dF_i|_x = 0$, $i = 1, 2$. Назовем функции F_i локально эквивалентными в точке $x \in T^*M$, если существует канонический диффеоморфизм $\alpha: O_1 \rightarrow O_2$ некоторых окрестностей $O_i \ni x$ такой, что $\alpha^*(dF_2) = dF_1$. Для локальной эквивалентности функций F_i необходима симплектическая эквивалентность их гессианов $h_i(X, Y)$ или симплектическая эквивалентность операторов $h_i: T_x(T^*M) \rightarrow T_x(T^*M)$,

$$d\rho(h_i X, Y) = h_i(X, Y), \quad X, Y \in T_x(T^*M).$$

Аналогично теореме 2 можно доказать, что это условие является достаточным, если собственные числа $\{\lambda_i\}$ операторов h_i таковы, что $\sum n_i \lambda_i \neq 0$, $\sum n_i \geq 3$, n_i — натуральные числа. При невыполнении этих условий инварианта $[h_i]$ недостаточно.

Замечание 2. Указанная выше локальная классификация дифференциальных уравнений первого порядка является, как легко видеть, ло-

кальной классификацией 1-форм $\omega \in \Lambda^1(R^{2n})$ в точке x , $\omega|_x = 0$, и $d\omega|_x$ максимального ранга.

З а м е ч а н и е 3. Скажем, что V формально интегрируемо, если $V^s = \bigcup_{x \in V} V_x^s$ — гладкое многообразие, $s \geq 0$, если $\Pi_s: V^s \rightarrow V^{s-1}$ — рас- слоенное многообразие (см. (2)). В нашем случае в окрестности точки x , $\omega|_x = 0$, уравнение не является формально интегрируемым, хотя V_s , $s \geq 0$, — гладкое многообразие. Условия $\sum m_i \lambda_i \neq 1$, $\sum m_i \geq k$ являются аналогом δ -леммы Пуанкаре, так как в этом случае препятствия к построению цепочки $x_s \in V_x^s$ исчезают при $s \geq k - 2$.

В заключение автор выражает признательность А. М. Виноградову за постановку задачи и ценные советы.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило
1 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. М. Виноградов, ДАН, 210, № 1 (1973). ² D. C. Spencer, Bull. Am. Math. Soc., 75, № 2 (1969).