

УКД 517.946

МАТЕМАТИКА

В. Г. МАЗЬЯ, Б. А. ПЛАМЕНЕВСКИЙ

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ОСОБЕННОСТЯМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 VII 1972)

1°. В этой работе изучаются дифференциальные эллиптические задачи на многообразиях с особенностями довольно общей природы. В качестве особенностей допускаются «ребра» различных размерностей и их всевозможные пересечения (под ненулевыми углами). Такие же множества рассматриваются как носители разрывов коэффициентов.

Краевые задачи в областях с коническими точками на границе достаточно хорошо изучены (см. ^(1, 2) и приведенную там литературу). В работах ⁽³⁻¹¹⁾ с различных точек зрения изучались краевые задачи с особенностями (коэффициентов или границы), сосредоточенными на гладком s -мерном многообразии. Задачи типа С. Л. Соболева в случае подмногообразий с многомерными особенностями рассматривались в ⁽¹²⁾.

2°. Операторы и пространства. Пусть Ω — n -мерное многообразие класса $\mathcal{D}_n^l$, определенного в ⁽¹³⁾. Мы будем использовать обозначения и терминологию, введенные в ⁽¹³⁾; в частности, через $(\xi_0, \rho_0, \dots, \xi_l, \rho_l, \alpha_l)$ обозначим локальные координаты на Ω .

Пусть $Z_k = (\xi_0, \dots, \xi_k)$, $R_k = (\rho_0, \dots, \rho_k)$, $Z = Z_q$, $R = R_q$; μ_j — мультииндекс размерности d_j , ν_j — неотрицательное целое число; $M_k = (\mu_0, \dots, \mu_k)$, $N_k = (\nu_0, \dots, \nu_k)$, $M = M_q$, $N = N_q$; $s(M, N) = (|M_0| + |N_0|, \dots, |M_{q-1}| + |N_{q-1}|; 0)$. Функция χ , определенная в $\mathcal{P}$, принадлежит классу $\mathcal{D}^l$, если функции $R^{s(M, N)} D_Z^M D_R^N \chi$, где $|M| + |N| \leq l$, непрерывны.

Объединим в класс $O(p, m, \Omega)$, $p + m \leq l$, дифференциальные операторы P на $\Omega \setminus \partial\Omega$, подчиненные следующему условию. В любой системе координат $(\xi_0, \rho_0, \dots, \xi_q, \rho_q)$

$$P = \sum_{|M| + |N| \leq p} a_{M, N} R^{s(M, N) - p} D_Z^M D_R^N, \quad (1)$$

где $\mathbf{p} = (p, \dots, p, 0)$, $a_{M, N} \in \mathcal{D}^l$. Если в координатной окрестности V_1 для оператора P справедливо представление (1), то во всякой другой окрестности V_2 ($V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$) этот оператор представляется в аналогичном виде. Обозначим через L и B матричные дифференциальные операторы размеров $k \times k$ и $r \times k$. Элементы l_{ij} матрицы L принадлежат классам $O(t_{ij}, m, \Omega)$, где $t_{ij} \leq s_i + t_i$, $t_{ij} + m \leq l$, а элементы b_{ij} матрицы B — классам $O(\tau_{ij}, m, \Omega)$, где $\tau_{ij} \leq s_i + t_j$, $\tau_{ij} + m \leq l$. Через s_i , t_j , σ_i обозначены целые числа такие, что $\max s_i = 0$, $t_j \geq 0$, $s_1 + t_1 + \dots + s_k + t_k = 2r$. Пусть γ — оператор сужения на M^{n-1} и $\mathcal{A}$ — оператор краевой задачи $\{L, \gamma B\}$. Будем предполагать, что $\mathcal{A}$ — эллиптический по Дуглису — Ниренбергу.

Сопоставим каждому d -мерному страту T вещественное число β_T , $0 \leq d \leq n - 2$, и обозначим через $\mathcal{B}$ набор всех β_T . Пусть U — окрестность, обслуживающая страт T , $\kappa: U \rightarrow R^d \times R^{n-d} \times \Omega_1$, и пусть $S \in \text{st}(T)$. Обозначим через S_1 страт $\partial\Omega_1$, порожденный стратом S , и положим $\beta_{S_1} = \beta_S$, $\mathcal{B}_1 = \{\beta_{S_1}: S \in \text{st}(T)\}$. Если $\text{st}(T)$ содержит лишь $(n - 1)$ -мерные страты, то $\mathcal{B}_1$ — пустое множество. Введем пространство функций $H_{\mathcal{B}}(\Omega)$. Допустим, что оно определено для всех $\Omega \in \mathcal{D}_n^l$, $k < n$. На n -мерном многообразии Ω норма в $H_{\mathcal{B}}(\Omega)$ склеивается, как обычно, из локальных норм.

Для функций u с носителями в U введем норму

$$\|u\|_{H_{s\mathcal{B}}} = \left(\int_{R^d} d\xi \int_0^\infty \sum_{|\mu|+v \leq s} \|(\rho D_\rho)^\mu (\rho D_\rho)^v u \circ \kappa^{-1}\|_{H_{s-|\mu|-v, \mathcal{B}_1(\Omega_1)}}^2 \rho^{2(\beta_T-s)+n-d-1} d\rho \right)^{1/2}.$$

Если $\mathcal{B}$ — пустое множество, то, по определению, $H_{s\mathcal{B}}(\Omega)$ есть пространство $H_s(\Omega)$ С. Л. Соболева. Через $\gamma H_{s\mathcal{B}}(\Omega)$ обозначим пространство следов на M^{n-1} функций из $H_{s\mathcal{B}}(\Omega)$. Пусть s — целое число, $\max\{\sigma_i + 1, s_i\} \leq s \leq \min\{t_{ij} + s_i, \tau_{ij} + \sigma_i\}$. Оператор $\mathfrak{A}$, определенный на $\prod_{i=1}^k H_{s+t_{ij}, \mathcal{B}}(\Omega)$, непрерывно действует в $\prod_{i=1}^k H_{s-s_i, \mathcal{B}}(\Omega) \times \prod_{j=1}^r \gamma H_{s-\sigma_i, \mathcal{B}}(\Omega)$. Введем еще в $H_s(\Omega)$ норму, зависящую от векторного параметра ξ :

$$\|u\|_{H_{s, \mathcal{B}}(\xi, \Omega)}^2 = \sum_{k=0}^s |\xi|^{2k} \|u\|_{H_{s, \mathcal{B}}(\Omega)}^2.$$

Будем рассматривать также операторы $P(\xi) = \sum_{|\gamma| \leq p} \xi^\gamma P_\gamma$, где $P_\gamma \in O(p - |\gamma|, m, \Omega)$. Естественно вводятся матричные операторы $L(\xi)$, $B(\xi)$ и оператор $\mathfrak{A}(\xi) = \{L(\xi), \gamma B(\xi)\}$ краевой задачи. Предположим, что $\mathfrak{A}(\xi)$ эллиптический (с учетом параметра).

3°. Нётеровость и разрешимость краевой задачи. Пусть U — окрестность, обслуживающая d -мерный страт T , $0 \leq d \leq n-2$, $x \in U$, (ξ, ρ, α) — проекции точки $\kappa(x)$ на сомножители произведения $R^d \times R_+^1 \times \Omega_1$. В координатах (ξ, ρ, α) оператор $P \in O(p, m, \Omega)$ можно представить в виде

$$P = \rho^{-p} \sum_{|\mu|+v \leq p} P_{\mu, v}(\xi, \rho) (\rho D_\xi)^\mu (\rho D_\rho)^v,$$

где $P_{\mu, v} \in O(p - |\mu| - v, m, \Omega)$. Для каждой точки $x^{(0)} = (\xi^{(0)}, \rho = 0)$ определим «модельный» оператор в $R^1 \times \Omega_1$:

$$\mathring{P}(\xi^{(0)}, 0; \rho\eta, \rho D_\rho) = \sum_{|\mu|+v \leq p} P_{\mu, v}(\xi^{(0)}, 0) (\rho\eta)^\mu (\rho D_\rho)^v.$$

Оператору $P(\xi)$ сопоставим модельный $\mathring{P}(\xi^{(0)}, 0; \rho\xi, \rho\eta, \rho D_\rho) = \sum (\rho\xi)^\gamma \times P_\gamma(\xi^{(0)}, 0; \rho\eta, \rho D_\rho)$, $|\gamma| \leq l$. Оператор $\mathfrak{A}$ краевой задачи на Ω^0 порождает в каждой точке $x^{(0)}$ множества $M^0 \cup \dots \cup M^{n-2}$ модельный оператор $\mathring{\mathfrak{A}}(\xi^{(0)}; 0; \rho\eta, \rho D_\rho) = \{\mathring{L}, \gamma \mathring{B}\}$ краевой задачи в $K^{n-d} = R_+^1 \times \Omega_1$, где d — размерность страта T , содержащего $x^{(0)}$. Здесь, $\mathring{L}$, $\mathring{B}$ — матрицы с элементами $\mathring{l}_{ij}$, $\mathring{l}_{ij}$. Аналогично определяется оператор $\mathring{\mathfrak{A}}(\xi^{(0)}, 0; \rho\xi, \rho\eta, \rho D_\rho)$.

Через $E_{s, \mathcal{B}_T}(K^{n-d})$, где $\mathcal{B}_T = \{\beta_T, \mathcal{B}_1\}$, обозначим пространство функций в K^{n-d} , снабженное нормой

$$\|v\|_{E_{s, \mathcal{B}_T}} = \left(\int_0^\infty \sum_{k_1+k_2 \leq s} \rho^{2k_1} \|(\rho D_\rho)^{k_2} v\|_{H_{s-k_1-k_2, \mathcal{B}_1}(\Omega_1)}^2 \rho^{2(\beta_T-s)+n-d-1} d\rho \right)^{1/2},$$

а через $\gamma E_{s, \mathcal{B}_T}(K^{n-d})$ — пространство следов функций из $E_{s, \mathcal{B}_T}(K^{n-d})$ на объединении $(n-d-1)$ -мерных стратов ∂K^{n-d} . Оператор $\mathring{\mathfrak{A}}$, определен-

ный на $\prod_{j=1}^k E_{s+t_j, \mathcal{B}_T}(K^{n-d})$, непрерывно действует в $\prod_{i=1}^k E_{s-s_i, \mathcal{B}_T}(K^{n-d}) \times$
 $\times \prod_{i=1}^r \gamma E_{s-\sigma_i, \mathcal{B}_T}(K^{n-d})$.

Лемма 1. Оператор $\mathfrak{A}$ нётеров в том и только в том случае, если для всех η , $|\eta| = 1$, оператор $\mathfrak{A}(\xi^{(0)}, 0; \rho\eta, \rho D_\rho)$ осуществляет изоморфизм при любом $x^{(0)} \in M^1 \cup \dots \cup M^{n-2}$ и является нётеровым при $x^{(0)} \in M^0$.

Лемма 2. Для того чтобы при достаточно больших $|\xi|$ оператор $\mathfrak{A}(\xi)$ был изоморфизмом и выполнялось неравенство

$$\sum_{j=1}^k \|u_j\|_{H_{s+t_j, \mathcal{B}}}(\xi, \Omega) \leq c \left\{ \sum_{i=1}^k \|(L(\xi)u)_i\|_{H_{s-s_i, \mathcal{B}}}(\xi, \Omega) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^r \|(\gamma B(\xi)u)_i\|_{H_{s-\sigma_i, \mathcal{B}}}(\xi, \Omega) \right\}$$

с постоянной c , не зависящей от ξ , необходимо и достаточно, чтобы для всех ξ , η , $|\xi|^2 + |\eta|^2 = 1$, операторы $\mathfrak{A}(\xi^{(0)}, 0; \rho\xi, \rho\eta, \rho D_\rho)$ осуществляли изоморфизмы, какова бы ни была точка $x^{(0)} \in M^0 \cup \dots \cup M^{n-2}$.

Если оператор $\mathfrak{A}(\xi^{(0)}, 0; 0, \lambda)$ удовлетворяет условиям: а) при больших $|\lambda|$, $\lambda \in R^1$: $\mathfrak{A}(0, \lambda)$ — изоморфизм; б) справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^k \|u_j\|_{H_{s+t_j, \mathcal{B}_1(\lambda, -\Omega)}} \leq c \left\{ \sum_{i=1}^k \|(\hat{L}(0, \lambda)u)_i\|_{H_{s-s_i, \mathcal{B}_1(\lambda, \Omega)}} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^r \|(\gamma \hat{B}(0, \lambda)u)_i\|_{H_{s-\sigma_i, \mathcal{B}_1(\lambda, \Omega)}} \right\}.$$

с постоянной c , не зависящей от λ , то $[\mathfrak{A}(0, \lambda)]^{-1}$ является мероморфной оператор-функцией, полюсы которой (за исключением разве лишь конечного числа) расположены внутри некоторого двойного узла, содержащего мнимую ось.

Лемма 3. Оператор $\mathfrak{A}(\rho\eta, \rho D_\rho)$ нётеров в том и только в том случае, когда выполнены условия а) и б) и прямая $\text{Im } \lambda = s - (n - d + \beta_T)/2$ не содержит полюсов $[\mathfrak{A}(0, \lambda)]^{-1}$, где T — страт, содержащий $x^{(0)}$.

Лемма 4. Для выполнения условий а) и б) необходимо и достаточно, чтобы для любой точки y_0 , расположенной на δ -мерном страте границы K^{n-d} , $0 < \delta < n - 1$, модельный оператор, порожденный оператором $\mathfrak{A}(0, \rho D_\rho)$, был нётеровым (был изоморфизмом).

В силу лемм 1–3 проверка нётеровости оператора $\mathfrak{A}$ (обратимости оператора $\mathfrak{A}(\xi)$ при больших $|\xi|$) на n -мерном многообразии Ω свелась к последовательной проверке условий леммы 3 для операторов (с параметрами) на многообразиях меньшего числа измерений (при априорных предположениях о тривиальности ядра и коядра любой модельной задачи). Используя лемму 4, можно расшифровать эту схему следующим образом. Пусть T — d -мерный страт $\partial\Omega$ и $T_0, \dots, T_l = T$ — цепочка стратов, $T_k \in \text{st}(T_j)$, $k > j$. В любой системе координат $(\xi_0, \rho_0, \dots, \xi_l, \rho_l, \alpha_l)$, $\alpha_l \in \Omega_{l+1}$, оператор $P \in O(p, m, \Omega)$ имеет вид

$$P = \hat{\rho}_l^{-p} \sum_{|M_l| + |N_l| \leq p} P_{M_l, N_l}(Z_l, R_l) (\hat{R}_l D_{Z_l})^{M_l} (R_l D_{R_l})^{N_l},$$

где $\hat{\rho}_j = \rho_j, \dots, \rho_0$, $\hat{R}_l = \{\hat{\rho}_0, \dots, \hat{\rho}_l\}$, $P_{M_l, N_l} \in O(p - |M_l| - |N_l|, m, \Omega_{l+1})$. Обобщая данное ранее определение модельного оператора, каждому набору

пу $(Z_l^{(0)}, 0) = (\zeta_0^{(0)}, 0, \dots, \zeta_l^{(0)}, 0)$ сопоставим модельный оператор на $R_+^1 \times \Omega_{l+1}$:

$$\hat{P} = \sum_{|M_l| + |N_l| \leq p} P_{M_l, N_l}(Z_l^{(0)}, 0) (\rho H)^{\Gamma_l} (\rho D_\rho)^{\nu_l},$$

где $H \in R^{d_0 + \dots + d_{l+1}}$, $d = d_l$, $\Gamma_l = \{\mu_0, \nu_0, \dots, \mu_{l-1}, \nu_{l-1}, \mu\}$. Естественно определяются операторы $\mathfrak{A}_d(Z_l^{(0)}, 0; \rho H, \rho D_\rho)$ модельных краевых задач в $R_+^1 \times \Omega_{l+1}$. Если $\mathfrak{A}$ зависит от параметра ξ , то в определении $\mathfrak{A}$ следует заменить H на (H, ξ) . По определению, набор чисел $\mathcal{B}$ является допустимым, если он удовлетворяет следующему условию.

Каждому $(n-2)$ -мерному страту T сопоставляется число β_T такое, что прямые $\text{Im } \lambda = s - 1 - \beta_T$ не содержат полюсов операторов $[\mathfrak{A}_{n-2}(0, \lambda)]^{-1}$, связанных со стратом T . Предположим, что $\ker \mathfrak{A}_{n-2}(\rho H, \rho D_\rho) = 0$, $\text{coker } \mathfrak{A}_{n-2}(\rho H, \rho D_\rho) = 0$ для всех операторов $\mathfrak{A}_{n-2}(\rho H, \rho D_\rho)$. Тогда, по лемме 4, операторы $\mathfrak{A}_{n-3}(0, \lambda)$ удовлетворяют условиям а) и б), где набор $\mathcal{B}_1$ однозначно определен показателями β_T $(n-2)$ -мерных стратов. Допустим, что показатели всех стратов размерности $d > n - k$ выбраны так, что для операторов $\mathfrak{A}_{n-k}(0, \lambda)$ выполнены условия а), б), где набор $\mathcal{B}_1$ однозначно определен показателями d -мерных стратов. Пусть показатели $(n-k)$ -мерных стратов T выбраны так, что прямые $\text{Im } \lambda - s - \beta_T - k/2$ не содержат полюсов $[\mathfrak{A}_{n-k}(0, \lambda)]^{-1}$ и ядро, и коядро любого оператора, $\mathfrak{A}_{n-k}(\rho H, \rho D_\rho)$ тривиальны. Тогда, по лемме 4, все операторы $\mathfrak{A}_{n-k-1}(0, \lambda)$ удовлетворяют условиям а), б). Если так удастся пройти все размерности $d = n - 2, \dots, 1, 0$, то получается допустимый набор $\mathcal{B}$. Если при построении $\mathcal{B}$ не требовать тривиальности $\ker \mathfrak{A}_0$ и $\text{coker } \mathfrak{A}_0$, то получим набор, допустимый в слабом смысле.

Теорема. Оператор $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}(\xi))$ является нётеровым (изоморфизмом при больших $|\xi|$) в том и только в том случае, когда набор $\mathcal{B}$ допустимый в слабом смысле (допустимый).

Асимптотические представления решения вблизи страта имеют вид, аналогичный указанному в ⁽¹¹⁾ для случая $(n-2)$ -мерного ребра.

4°. Связь с задачей Римана — Гильберта. По-видимому, неизвестно, можно ли в общей ситуации найти содержательные условия тривиальности ядра и коядра модельной задачи. В частных случаях (для сильно эллиптических задач, для задачи с косою производной и некоторых других) такие условия найдены (см. ^(5, 10, 11)). Отметим, что исследование модельной задачи сводится к изучению задачи Римана — Гильберта на полупрямой с вполне непрерывным операторным коэффициентом.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
4 VI 1972

Ленинградский институт текстильной
и легкой промышленности
им. С. М. Кирова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Кондратьев, Тр. Московск. матем. общ., 16, 209 (1967). ² Г. И. Эскин, Тр. Московск. матем. общ., 21, 245 (1970). ³ М. И. Вишик, Г. И. Эскин, УМН, 22, в. 1, 15 (1967). ⁴ М. И. Вишик, Г. И. Эскин, Сиб. матем. журн., 9, № 5, 973 (1968). ⁵ В. А. Кондратьев, Дифференциальные уравнения, 6, № 10, 1831 (1970). ⁶ М. И. Вишик, В. В. Грушин, Матем. сборн., 79, № 1, 3 (1969). ⁷ В. В. Грушин, Матем. сборн., 84, № 2, 163 (1971). ⁸ Чан Зуи Хо, Г. И. Эскин, ДАН, 198, № 1, 50 (1971). ⁹ В. И. Фейгин, УМН, 27, в. 2, 183 (1972). ¹⁰ В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, Функц. анализ, 5, в. 3, 102 (1971). ¹¹ В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, Тр. симпозиума по механике сплошной среды, Тбилиси, 1972. ¹² Б. Ю. Стернин, ДАН, 189, № 4, 732 (1969). ¹³ В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, Изв. высш. учебн. завед., Математика, 11 (126), 46 (1972).