

УДК 513.88+519.55

МАТЕМАТИКА

В. Л. ЛЕВИН

СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫПУКЛЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ЛИФТИНГИ, ТОЖДЕСТВЕННЫЕ НА ПОДПРОСТРАНСТВАХ $\mathcal{L}^\infty$

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 7 XII 1972)

В заметке сообщаются новые результаты об интегральном представлении субдифференциалов выпуклых функционалов вида

$$I_f[x(\cdot)] = \int_T f(t, x(t)) \mu(dt), \quad x(\cdot) \in L^\infty_x(T, \Sigma, \mu)$$

и указывается их связь с проблемой существования линейных лифтингов, тождественных на заданном подпространстве $H \subset \mathcal{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$.

Далее везде (T, Σ, μ) — пространство с неотрицательной σ -конечной мерой; $\mathcal{X}$ — вещественное банахово пространство; $L^\infty_x = L^\infty_x(T, \Sigma, \mu)$ — банахово пространство (классов эквивалентных относительно μ) ограниченных сильно измеримых вектор-функций $x(\cdot): T \rightarrow \mathcal{X}$ с нормой $\|x(\cdot)\|_\infty = \text{vrai max}_{t \in T} \|x(t)\|_{\mathcal{X}}$; $L^\infty \hat{\otimes} \mathcal{X}$ — замыкание в $L^\infty_x(T, \Sigma, \mu)$ множества конечномерных вектор-функций.

Функция $f(t, x): T \times G \rightarrow \mathbf{R}^1$ (где $G \subset \mathcal{X}$ выпукло и обладает внутренностью $\text{int } G = \phi$) предполагается выпуклой по x и непрерывной в $x_0 \in \text{int } G$ для всякого $t \in T$ и измеримой по t для всякого $x \in G$. Положим $x_0(t) = x_0 \quad \forall t \in T$.

1°. Напомним, что субдифференциалом выпуклой функции $g: U \rightarrow \mathbf{R}^1$ (U — выпуклое подмножество банахова пространства $\mathcal{X}$) в точке $y_0 \in \text{int } U$ называется множество

$$\partial g(y_0) = \{y' \in \mathcal{X}' \mid \langle y - y_0, y' \rangle \leq g(y) - g(y_0) \quad \forall y \in U\}.$$

Теорема 1. Следующие предположения эквивалентны:

1) Функционал I_f определен для всех $x(\cdot)$ из некоторой окрестности $x_0(\cdot)$ в L^∞_x и непрерывен в $x_0(\cdot)$.

2) Функционал I_f непрерывен в $x_0(\cdot)$ относительно сходимости почти всюду, т. е. существует окрестность $V[x_0(\cdot)] \subset L^\infty_x$ такая, что

$$\{x_n(\cdot)\} \subset V[x_0(\cdot)], \quad x_n(t) \rightarrow x_0(t) \text{ п.в.} \Rightarrow I_f[x_n(\cdot)] \rightarrow I_f[x_0(\cdot)].$$

3) Функция $f(t, x(t))$ суммируема для всякой $x(\cdot)$ из некоторой окрестности $x_0(\cdot)$ в L^∞_x .

4) Существуют $\varepsilon > 0$ и суммируемая функция $r(t) > 0$ такие, что $S_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathcal{X} \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\} \subset G$ и для всякого $x \in S_\varepsilon(x_0)$ $|f(t, x)| \leq r(t)$ п.в. на T .

Если выполняется какое-нибудь одно из условий 1), 2), 3), 4) (и, следовательно, выполняются все четыре условия), то существует функция $\tilde{f}(t, x): T \times S_\varepsilon(x_0) \rightarrow \mathbf{R}^1$ с такими свойствами:

а) $\tilde{f}(t, x)$ выпукла по x и непрерывна в x_0 для всякого $t \in T$ и измерима по t для всякого $x \in S_\varepsilon(x_0)$.

б) Для всякого $x \in S_\varepsilon(x_0)$ $\tilde{f}(t, x) = f(t, x)$ п.в. на T .

в) $I_f[x(\cdot)] = I_f[x(\cdot)]$ на $V_\varepsilon[x_0(\cdot)] = \{x(\cdot) \in L^\infty_x \mid \|x(\cdot) - x_0(\cdot)\|_\infty \leq \varepsilon\}$.

г) Для любого подпространства $\mathfrak{S} \subset L^\infty_x$, содержащего $x_0(\cdot)$, субдифференциал $\partial I_f^\mathfrak{S}[x_0(\cdot)]$ ($I_f^\mathfrak{S}$ обозначает ограничение I_f на $\mathfrak{S}$) есть множество функционалов $y' \in \mathfrak{S}'$, допускающих представление

$$\langle x(\cdot), y' \rangle = \int_T \langle x(t), x'(t) \rangle \mu(dt) \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{S},$$

где $x'(t) \in \partial \tilde{f}(t, x_0)$ для всех $t \in T$, функция $x'(\cdot): T \rightarrow \mathfrak{X}'$ слабо измерима и $\|x'(\cdot)\|_{\mathfrak{X}'} \in L^1 = L^1(T, \Sigma, \mu)$.

Будем говорить, что для субдифференциала $\partial I_f^\mathfrak{S}[x_0(\cdot)]$ существует регулярное интегральное представление, если $\partial I_f^\mathfrak{S}[x_0(\cdot)]$ состоит из функционалов y' , допускающих представление г) с $\tilde{f}(t, x) = f(t, x) \quad \forall t \in T, x \in G$. Регулярные интегральные представления изучались многими авторами (подробная библиография имеется в (1)). Далее мы укажем связь этих представлений с существованием специальных линейных лифтингов на $\mathcal{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$.

2°. Обозначим через $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$ банахово пространство вещественных ограниченных измеримых функций на T с нормой $\|\varphi\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_{t \in T} |\varphi(t)|$. Напомним (см. (2, 3)), что линейным лифтингом $\mathcal{L}^\infty$ называется линейное отображение $\rho: \mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathcal{L}^\infty$ со следующими свойствами:

I. $\rho(\varphi)(t) = \varphi(t)$ п.в.

II. $\rho(1) = 1$, где 1 — функция на T , равная тождественно 1.

III. $\varphi(t) \geq 0$ п.в. $\Rightarrow \rho(\varphi)(t) \geq 0 \quad \forall t \in T$.

Пусть H — линейное подпространство в $\mathcal{L}^\infty$ и $1 \in H$. Будем называть H -лифтингом линейный лифтинг $\mathcal{L}^\infty$, тождественный на H . Если (T, Σ, μ) — вполне регулярное топологическое пространство с борелевской мерой, а $H = C^b(T)$ — пространство ограниченных непрерывных функций на T , то H -лифтинг — это сильный линейный лифтинг $\mathcal{L}^\infty$ (см. (2)).

Рассмотрим два условия на H :

а) $h \in H$ и $h(t) \geq 0$ п.в. $\Rightarrow h(t) \geq 0 \quad \forall t \in T$.

Согласно свойству III условие а) необходимо для существования H -лифтинга. Если выполняется а), то можно отождествить H с подпространством L^∞ , относя каждой функции $h \in H$ тот класс эквивалентных функций $[h] \in L^\infty$, в который она входит.

б) Имеет место а) и для всякого ограниченного сверху в L^∞ множества $Q \subset H$ выполняется равенство $\sup_{L^\infty} Q = [\varphi]$, где $\varphi(t) = \sup \{h(t) \mid h \in Q\}$, $[\varphi]$ — образ φ при каноническом гомоморфизме $\mathcal{L}^\infty \rightarrow L^\infty$.

Предложение 1. Если H сепарабельно и удовлетворяет а), то существует H -лифтинг.

Предложение 2. Пусть $\mu(T \setminus \bigcup_{n=1}^\infty T_n) = 0$, где $T_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \dots$

Обозначим через H_n подпространство $\mathcal{L}^\infty(T_n)$, состоящее из ограничений на T_n функций $h \in H$. Предположим, что H удовлетворяет а).

Тогда из существования H_n -лифтингов на $\mathcal{L}^\infty(T_n)$ для всех n следует существование H -лифтинга на $\mathcal{L}^\infty$.

Предложение 3. Если существует H -лифтинг, то H удовлетворяет условию б).

3°. Пусть выполняется а). Функция $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ называется H -вогнутой (ср. с (4)), если $\varphi(t) = \inf \{h(t) \mid h \in Q\}$, где $Q \subset H$ ограничено снизу в L^∞ .

Предложение 4. Если выполняется б), то H -вогнутость $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ равносильна равенству $\varphi(t) = \inf \{h(t) \mid h \geq \varphi \text{ п.в., } h \in H\} \quad \forall t \in T$.

Теорема 2. *Предположим, что существует H -лифтинг и выполняются предположения теоремы 1. Кроме того, предположим следующее:*

- 1) *функция $t \rightarrow f(t, x)$ H -вознута $\forall x \in S_e(x_0)$;*
- 2) *существует измеримая функция $r_1(t) > 0$ такая, что $h/r_1 \in H$ для всякой $h \in H$ и $|f(t, x)| \leq r_1(t)$ п.в. $\forall x \in S_e(x_0)$.*

Тогда для субдифференциала $\partial I_f^{\mathfrak{F}}[x_0(\cdot)]$, где $\mathfrak{F}$ — любое содержащее $x_0(\cdot)$ подпространство L_x^∞ , существует регулярное интегральное представление.

Из теоремы 2 вытекает ряд новых результатов о регулярных интегральных представлениях субдифференциалов.

Теорема 3. *Регулярное интегральное представление субдифференциалов $\partial I_f^{\mathfrak{F}}[x_0(\cdot)]$, где $\mathfrak{F} \ni x_0(\cdot)$, существует в каждом из следующих случаев:*

- 1) *(T, Σ, μ) — метризуемое локально компактное пространство с мерой Радона; функция $t \rightarrow f(t, x)$ полунепрерывна сверху для всякого $x \in S_e(x_0)$; выполняются предположения теоремы 1; $\sup_{x \in S_e(x_0)} |f(t, x)| \leq r_1(t)$,*

где r_1 непрерывна.

- 2) *(T, Σ, μ) — бикомпакт с конечной мерой Радона; $f(t, x)$ непрерывна по t для всякого $x \in S_e(x_0)$; $\sup_{x \in S_e(x_0)} |f(t, x)| \leq \text{const} \quad \forall t \in T$; семейство*

функций на T $\{f(\cdot, x) | x \in S_e(x_0)\}$ равностепенно непрерывно.

Случай 1) теоремы 3 близок к одному результату А. Д. Иоффе (теорема 3.4 в (1)), однако, в отличие от последнего, сепарабельность T здесь не предполагается (зато предполагается, что T локально-компактно). Следующий результат был ранее получен автором в частном случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}$ (теорема 2.1 в (1)).

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ сепарабельно и $f(t, x(t))$ суммируема для всякой $x(\cdot) \in V_e[x_0(\cdot)]$.*

Тогда для любого $\mathfrak{F} \ni x_0(\cdot)$ функционал $I_f^{\mathfrak{F}}$ непрерывен в $x_0(\cdot)$ и существует регулярное интегральное представление субдифференциала $\partial I_f^{\mathfrak{F}}[x_0(\cdot)]^$.*

4°. Для пространства с конечной мерой теорема 2 допускает обращение.

Предварительно заметим, что если I_f непрерывен в $x_0(\cdot)$, то из существования регулярного интегрального представления $\partial I_f[x_0(\cdot)]$ следует, в силу теоремы Хана — Банаха, существование регулярного интегрального представления $\partial I_f^{\mathfrak{F}}[x_0(\cdot)]$ для любого $\mathfrak{F} \ni x_0(\cdot)$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 5. *Предположим, что $\mu T < \infty$, а H удовлетворяет условию β). Возьмем $\mathfrak{X} = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, $x_0 = 0$, $r(t) = \text{const} > 0$, $\mathfrak{F} = L^\infty \hat{\otimes} \mathfrak{X}$.*

Тогда существует функция $f(t, x): T \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^1$ со следующими свойствами:

- 1) *f сублинейна по x и удовлетворяет всем предположениям теоремы 2;*
- 2) *I_f непрерывен на L_x^∞ ;*
- 3) *Существование регулярного интегрального представления для субдифференциала $\partial I_f^{\mathfrak{F}}[0]$ равносильно существованию H -лифтинга.*

З а м е ч а н и е. Теорема 5 остается верна, если вместо конечности меры, предположить существование суммируемой функции $h_0(t) > 0$ такой, что $h_0 h \in H$ для всякой $h \in H$.

5°. В доказательствах теорем 1, 2 и 4 используется существование разложения Лебега для непрерывных линейных функционалов на L_x^∞ . Сформулируем теорему о разложении.

* В случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}$ достаточно предполагать суммируемость $f(t, x)$ для всех $x \in S_e(x_0)$ ((1), теорема (2.1)).

Функционал $\lambda \in L_{\mathfrak{X}}^{\infty'}$ называется абсолютно непрерывным относительно μ , если

$$\langle x(\cdot), \lambda \rangle = \int_T \langle x(t), x'(t) \rangle \mu(dt), \quad \forall x(\cdot) \in L_{\mathfrak{X}}^{\infty},$$

где $x'(\cdot): T \rightarrow \mathfrak{X}'$ слабо измерима и $\|x'(\cdot)\|_{\mathfrak{X}'} \in L^1$.

Функционал $\lambda \in L_{\mathfrak{X}}^{\infty'}$ называется сингулярным относительно μ , если существует последовательность множеств $T_n \in \Sigma$ такая, что $T_{n+1} \subset T_n$ для любого n , $\mu(T_n \cap T') \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $T' \in \Sigma$ с $\mu T' < \infty$ и $\langle x(\cdot), \lambda \rangle = 0$ для всякой $x(\cdot) \in L_{\mathfrak{X}}^{\infty}$, обращающейся в нуль на каком-нибудь T_n .

Теорема 6. *Каждый функционал $\lambda \in L_{\mathfrak{X}}^{\infty'}$ единственным способом разлагается в сумму $\lambda = \lambda_1 + \lambda_0$, где λ_1 абсолютно непрерывен, а λ_0 сингулярен относительно μ . При этом $\|\lambda\| = \|\lambda_1\| + \|\lambda_0\|$.*

В (') приведено доказательство этой теоремы в случае, когда $\mu T < \infty$, а $\mathfrak{X}$ сепарабельно.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
2 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Д. Иоффе, В. Л. Левин, Тр. Московск. матем. общ., 26, 3 (1972).
² A. Ionescu Tulcea, C. Ionescu Tulcea, Topics in the Theory of Lifting, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1969. ³ N. Dinulescu, Vector Measures, 1967.
⁴ С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов, УМН, 27, № 3, 127 (1972).