

А. Ф. ЛАВРИК, А. Ш. СОБИРОВ

ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ В ЭЛЕМЕНТАРНОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ
ТЕОРЕМЫ О ЧИСЛЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 24 XI 1972)

1. В 1948 г. А. Сельбергу ⁽¹⁾ и Эрдешу ⁽²⁾ удалось принципиально новым вполне элементарным методом доказать асимптотический закон распределения простых чисел в форме

$$\psi(x) = x + o(x), \quad (1)$$

где $\psi(x)$ — функция Чебышева.

С тех пор появилось довольно большое число работ (см. ^(3, 4)), посвященных уточнению при помощи этого метода оценки остаточного члена в формуле (1). Таким путем Бомбьеры ⁽³⁾ и Вирзинг ⁽⁴⁾ установили, что

$$\psi(x) = x + O(x \log^{-m} x),$$

для любого фиксированного положительного значения m .

Наконец, в последнее время Даймонд и Стениг ⁽⁵⁾ существенно усовершенствовали идеи и форму элементарного метода исследования функции $\psi(x)$ и показали, что погрешность от замены $\psi(x)$ на x является величиной порядка не большего, чем

$$x \exp \{-\log^{1/2} x \log^{-2} x\}. \quad (2)$$

Существо их метода составляют глубокое обобщение известной формулы А. Сельберга и тауберова аргументация по образцу Вирзинга ⁽⁴⁾.

В данной статье, усиливая тауберову аргументацию в этом методе, мы получаем новую оценку остаточного члена в элементарном доказательстве асимптотического закона распределения простых чисел. Наш результат, если его несколько огрубить, выглядит как нижеследующая

Теорема.

$$\psi(x) = x + O(x \exp \{-\log^{1/2} x \log^{-3} x\}). \quad (3)$$

Доказательство теоремы является элементарным в том смысле, что не использует каких-либо функциональных свойств дзета-функции Римана и вообще теории функций комплексного переменного. Однако в техническом отношении оно довольно сложно и громоздко.

2. Далее, в обозначениях Даймонда и Стенига ⁽⁵⁾, мы сформулируем ряд предложений, замещение на которые соответствующих утверждений из ⁽⁵⁾ приводит к оценке (3) вместо (2).

Основной является следующая

Теорема 1. *Предположим, что:*

1) f и g — измеримые вещественнозначные функции на $(0, \infty)$, такие, что для некоторого целого $n \geq 2$, положительных чисел F и G при всех $x > 0$ имеют место неравенства

$$\int_0^x f^2(t) dt \leq F \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad \int_0^x g^2(t) dt \leq G \frac{x^{2n-1}}{2n-1};$$

2) $h(x)$ определена на $(0, \infty)$ в виде

$$h(x) = B_n x^{1-2n} \int_0^x f(x-y) g(y) dy, \quad B_n = (2n-1)! / [(n-1)!]^2;$$

3) $M > 0$ целое, δ и ε — вещественные числа под условиями

$$0 < \delta \leq 20n\varepsilon^2 / (41M), \quad 0 < \varepsilon \leq 1 / (20n);$$

4) существует $X > 0$ такое, что при всех $x > X$ имеем

$$\left| \int_0^x h(t) dt \right| \leq \sqrt{r'G} \delta x;$$

5) для $X \leq Y \leq Z$, $Y' = (1 + \varepsilon)Y$

$$\Phi(Z, Y) = \begin{cases} Z - Y, & \text{если } Y \leq Z \leq Y', \\ \varepsilon Y + \left[\frac{1}{2} + 6n\varepsilon + \frac{1}{2M} \right] (Z - Y'), & \text{если } Z > Y'. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_Y^Z h^2(t) dt \leq FG \Phi(Z, Y).$$

Эта теорема существенно отличается от теоремы 6.1 из ⁽⁵⁾ условием на величину δ .

Пусть далее, как и в ⁽⁵⁾,

$$R(x) = \int_1^x L^{n-1} (dN - d\Psi).$$

Лемма 1. При целом $n \geq 10$, $A = 700$, $b \geq 11$ существует счетное множество $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ и абсолютно непрерывная на $[1, \infty)$ функция R_0 такая, что

$$a) |R_0'(x)| \leq (1 + 10^{-9b+87}) \log^{n-1} x; \quad x \notin \{x_j\},$$

$$б) |R_0(x) - R(x)| \leq (10^{9b-94} A n^4)^n x,$$

$$в) R_0(x) = 0 \text{ вблизи } 1.$$

Лемма 2. При целом $n \geq 10$, $A = 700$, $b \geq 11$, $x \geq \exp(10^{9b-94} A n^4)$, если $y_0 = 10^{81b-856} A^n n^4 x \log^{1-n} x$, $y_0 \leq y \leq x / (100n)$, имеем

$$|R(x+y) - R(x)| \leq (1 + 10^{-9b+87}) y \log^{n-1} x;$$

если же $0 < y \leq y_0$, тогда

$$|R(x+y) - R(x)| \leq (1 + 10^{-9b+87}) y_0 \log^{n-1} x \leq (10^{9b-94} A n^4)^n x.$$

Пусть R_v для $v = 1, 2, \dots$ определяются соотношением

$$\int_1^x L^n dR_v = B_n \int_1^x dR_{v-1} * dR_{v-1}$$

и $R_v(1) = 0$.

Лемма 3. При $n \geq 10$, $b \geq 11$, $v \geq 1$ для всех $x \geq 1$ имеем

$$|R_v'(x)| \leq (1 + 10^{-9b-87})^{2v} \log^{n-1} x.$$

Лемма 4. При $n \geq 10$, $b \geq 11$, $A = 700$ и

$$0 \leq v \leq \log(32n) / \log 2$$

для всех $x \geq 1$

$$|R_v(x) - R(x)| \leq (10^{9b-94} [4(1 + 10^{-9b+87})^{16}]^v A n^4)^n x.$$

Лемма 5. Если $\log x \geq 10^{10b-94} n^5$, $b \geq 11$, то

$$|R'_2(x)| \leq 0,8 \log^{n-1} x.$$

Лемма 6. Для $0 < \delta < 1/2$, $n \geq 9/\delta^2$, $5 \leq v \leq \log(128\delta^2 n) / \log 2$ и

$$\log x \geq \left(\frac{2}{1-\delta}\right)^{v-2} 10^{10b-94} n^5 = \log X_v, \quad b \geq 11,$$

имеем

$$|R'_v(x)| \leq [\exp(-2^{v-5}) + 1/2 \exp(-\delta^2 n)] \log^{n-1} x.$$

Перечисленные леммы 1—6 представляют собой необходимые для наших целей уточнения или видоизменения соответствующих лемм из (5), гл. VI. Их доказательство опирается на обобщенную формулу А. Сельберга (гл. V, §5.2) и указанную выше теорему 1. Общая схема доказательства в основном остается прежней. Но теперь мы можем выбрать n так, что

$$10^{10b-93} (n-1)^{6+\varepsilon_1} < \log x \leq 10^{10b-93} n^{6+\varepsilon_1}$$

при

$$\varepsilon_1 = \frac{1200}{\log \log x}, \quad b = \left(\frac{1}{9 \log 10} + \varepsilon_2\right) \log \log \log x, \quad \varepsilon_2 > 0,$$

что приводит к следующей оценке: при $x \geq x_0$, $\varepsilon_3 > 0$

$$|\psi(x) - x| \leq x \exp\{-\log^{1/\varepsilon_3} x (\log \log x)^{-2-5/27-\varepsilon_3}\}.$$

Некоторое огрубление этого неравенства и доказывает нашу теорему.

Ташкентский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступило
14 XI 1972

Ташкентский государственный университет
им. В. И. Ленина

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Selberg, Ann. Math., 50, 305 (1949). ² P. Erdos, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 35, 374 (1949). ³ E. Bombieri, Riv. Math. Univ. Parma (2), 3, 393 (1962). ⁴ E. Wirsing, J. reine angew. Math., 214/215, 1 (1964). ⁵ H. Diamond, J. Steinitz, Inven. math. Berlin, 11, № 3, 199 (1970).