

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

С. А. ЛИБЕР

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ А. И. МАЛЬЦЕВА

(Представлено академиком П. С. Александровым 12 XII 1972)

Цель этой заметки — указать необходимые и достаточные условия для положительного ответа на два вопроса в теории топологических алгебр, которые поставил А. И. Мальцев ⁽¹⁾ пятнадцать лет тому назад. Возникающая при этом возможность конструировать топологические алгебры с заданными свойствами позволяет, например, обобщить на случай произвольного невырожденного многообразия алгебр теорему А. А. Маркова ⁽²⁾ о существовании связных топологических групп экспоненты 2 любой мощности, начиная с $2^{\aleph_0}$. Соответствующий результат М. И. Граева ⁽³⁾ для топологических групп экспоненты n здесь также содержится как частный случай. В теории топологических алгебр эти результаты находят свое самое естественное место.

Будем придерживаться терминологии ⁽¹⁾ за одним исключением: никаких ограничений на мощность множества Ω основных операций рассматриваемых топологических алгебр не накладывается.

К проблеме описания топологической алгебры A , заданной в многообразии $\mathfrak{M}$ порождающим пространством X и совокупностью соотношений Σ

$$f_\lambda(x_{\lambda 1}, \dots, x_{\lambda n_\lambda}) = g_\lambda(x_{\lambda 1}, \dots, x_{\lambda n_\lambda}), \quad x_{\lambda i} \in X, \quad (1)$$

где f_λ, g_λ — многочлены, А. И. Мальцев относил следующие вопросы:

А) Изоморфна ли алгебра A абстрактной алгебре A' , заданной в многообразии $\mathfrak{M}$ теми же определяющими соотношениями Σ и порождающим множеством X , что и сама алгебра A ?

Б) Содержит ли алгебра A пространство X топологически, т. е. является ли каноническое непрерывное отображение σX в A гомеоморфным вложением?

Достаточные условия для положительного ответа на оба вопроса (X вполне регулярно, $\Sigma = \emptyset$), которые в случае многообразия групп превращаются в теоремы А. А. Маркова ⁽⁴⁾, были установлены Сверхковским ⁽⁵⁾. Приводимые необходимые и достаточные условия являются новыми и для топологических групп.

Необходимые условия для положительного ответа на эти вопросы получаются при рассмотрении многообразия групп. Поскольку каждая топологическая группа вполне регулярна, то не вполне регулярное пространство не может в ней содержаться, и возникает очевидное первое требование, чтобы X было вполне регулярным. Обозначим через Y подмножество X тех элементов, на которые наложены соотношения Σ , т. е. действительно участвующих в ⁽¹⁾. Предположим, что Y имеет хотя одну предельную точку $y_0 \in Y$, и рассмотрим топологическую группу G (абстрактную группу G'), заданную пространством (множеством) X и соотношениями $y_0^2 = 1, y = 1, y \in Y \setminus \{y_0\}$. В группе G все множество Y по непрерывности отождествляется с 1, в то время как в G' этого не происходит. Группа G' содержит элемент порядка 2 и алгебраически не изоморфна группе G , которая является свободной топологической группой в смысле Граева ⁽³⁾, а значит, не содержит элементов конечного порядка.

Будем говорить, что подмножество Y пространства X имеет дискретное в X семейство окрестностей своих

точек, если каждому $y \in Y$ можно сопоставить его окрестность V_y так, что у всякой точки $x \in X$ есть окрестность, пересекающаяся самое большее с одним элементом семейства $\{V_y; y \in Y\}$. Можно доказать, что подмножество Y вполне регулярного пространства X имеет дискретное в X семейство окрестностей своих точек тогда и только тогда, когда существует такое метрическое пространство M и непрерывное отображение fX в M , что при любых $y_1 \neq y_2$ из Y $\rho(f(y_1), f(y_2)) \geq 1$.

Второе необходимое условие: подмножество Y тех элементов X , на которые наложены соотношения Σ , обладает дискретным в X семейством окрестностей своих точек.

В самом деле, в силу сказанного можно сразу считать, что X вполне регулярно, а Y дискретно в индуцированной топологии. Пусть H — произвольная группа той же мощности, что и Y . Фиксируем взаимно однозначное соответствие $\alpha: H \rightarrow Y$ и перенесем с его помощью все соотношения из H на Y , т. е. получаемая совокупность Σ состоит из всех соотношений $h_1^\alpha, \dots, h_n^\alpha = 1^\alpha$, где $h_i \in H$ и $h_1, \dots, h_n = 1$. Если ответ на вопрос Б) положительный, то группа G , определяемая пространством X и соотношениями Σ , содержит X . Множество Y дискретно в топологии, индуцируемой из X , а значит, и в топологии, индуцируемой из G , т. е. Y — дискретная подгруппа G .

Пусть V — такая симметричная открытая окрестность 1, что $V^2 \cap Y = \{1\}$. Покажем, что $\{yV; y \in Y\}$ является дискретным в G семейством окрестностей точек Y . Если $y_1 V^2 \cap y_2 V^2 = \emptyset$, где $y_i \in Y$, то $y_1^{-1} y_2 \in V^2 \cap Y = \{1\}$ и $y_1 = y_2$, т. е. это семейство непересекающееся. Пусть $x \in G$. Если x содержится в некотором zV^2 , $z \in Y$, то в качестве окрестности x , пересекающейся лишь с одним множеством из $\{yV\}$, берем zV^2 . Если же $x \notin \bigcup yV^2$, $y \in Y$, то окрестность xV точки x не пересекается ни с одним множеством из $\{yV\}$, что и требовалось. Отсюда $\{yV \cap X; y \in Y\}$ — дискретное в X семейство окрестностей точек Y . Необходимость второго условия доказана.

Обозначим через σ' каноническое отображение множества X в абстрактную алгебру A' и докажем достаточность этих условий.

Теорема 1. Пусть X — вполне регулярное пространство, а соотношения Σ наложены на элементы такого подпространства $Y \subset X$, которое имеет дискретное в X семейство окрестностей своих точек. Тогда

1) Топологическая алгебра A , определяемая в произвольном многообразии $\mathfrak{M}$ пространством X и соотношениями Σ , изоморфна над X абстрактной алгебре A' , определяемой в $\mathfrak{M}$ множеством X и теми же соотношениями Σ .

2) Каноническое отображение σ замкнуто.

3) Образ X при отображении σ замкнут в A .

4) Каноническое отображение σ является гомеоморфным вложением тогда и только тогда, когда вложением является σ' .

Основным моментом доказательства является следующая

Лемма. Пусть абстрактная алгебра B порождается подмножеством X , $Y \subset X$ и каждое тождественное на Y отображение X в себя распространяется до эндоморфизма B . Пусть на X задана вполне регулярная топология так, что Y имеет дискретное в X семейство окрестностей своих точек.

Тогда на B может быть введена (хаусдорфова) топология, превышающая B в топологическую алгебру и такая, что X замкнуто в B , а индуцируемая на X топология совпадает с первоначальной.

Следствие. Пусть X вполне регулярное пространство, а Σ — конечная совокупность соотношений. Тогда имеют место 1)–4).

Свободная в смысле Граева топологическая группа определяется вполне регулярным пространством и одним соотношением $x_0 = 1$.

Отсюда следуют некоторые теоремы М. И. Граева ⁽³⁾ о свойствах этой группы.

Теорема 2 (ср. ⁽¹⁾, стр. 194). Каждая абстрактная алгебра A произ-

вольного многообразия $\mathfrak{M}$ изоморфно вкладывается в линейно связную топологическую алгебру L этого многообразия. Топологическая алгебра L может быть выбрана так, что

$$|L| \leq \max(|A|, |\Omega|, 2^{\aleph_0}). \quad (2)$$

Доказательство. Множество A вложим в метрическое пространство M следующим образом. Сопоставим каждому $a \in A$ пространство I_a , изометричное отрезку $[0, 1]$ и в $\bigcup I_a$, $a \in A$, отождествим все левые концы отрезков I_a между собой, а правые — с соответствующими элементами из A . Метрика ρ на полученном пространстве M определяется требованиями, чтобы на всяком I_a ρ совпадала с естественной метрикой этого отрезка, а для любых $a_1 \neq a_2$ из A было $\rho(a_1, a_2) = 2$. Обозначим через Σ совокупность всех соотношений, выполняющихся в алгебре A относительно ее элементов, и рассмотрим топологическую алгебру L , определяемую в многообразии $\mathfrak{M}$ пространством M и соотношениями Σ . Поскольку M — вполне регулярное пространство, а ε -окрестности точек A при $0 < \varepsilon < 1$ образуют дискретное семейство, то по теореме 1 алгебра L изоморфна абстрактной алгебре L' , определяемой в $\mathfrak{M}$ множеством M и теми же соотношениями Σ . Так как L' задана множеством и соотношениями алгебры A и еще некоторым множеством, свободным от соотношений, то A изоморфно вкладывается в L' с помощью канонического отображения σ' (⁽⁶⁾, стр. 282).

Ясно, что $|L| \leq \max(|A|, |\Omega|, 2^{\aleph_0})$. Остается доказать, что L линейно связна. С этой целью рассмотрим на L конгруэнцию ε , классы которой суть компоненты линейной связности топологической алгебры L и, естественный гомоморфизм $\varphi: L \rightarrow L/\varepsilon$ (в L/ε никакой топологии не вводим). Так как L алгебраически порождается своим линейно связным подпространством M^σ , то L/ε порождается одним элементом x , который является образом M^σ при гомоморфизме φ . В то же время подалгебра A алгебры L содержится в M^σ , отсюда $\{x\}$ — подалгебра алгебры L/ε , и, значит, L/ε состоит из одного элемента. Теорема доказана.

Теорема 3. Среди топологических алгебр произвольного невырожденного многообразия $\mathfrak{M}$ существуют линейно связанные алгебры произвольной мощности, начиная с $|\Omega| + 2^{\aleph_0}$.

Доказательство. Пусть $\gamma \geq |\Omega| + 2^{\aleph_0}$. В многообразии $\mathfrak{M}$ существует такая абстрактная алгебра A , что $|A| = \gamma$. По теореме 2 A вкладывается в линейно связную топологическую алгебру L из $\mathfrak{M}$ с условием (⁽²⁾), которое принимает вид $|L| \leq |A|$, так как $|A| \geq |\Omega| + 2^{\aleph_0}$. Следовательно, $|L| = |A| = \gamma$.

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
1 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 171 (1957). ² А. А. Марков, там же, 8, 225 (1944). ³ М. И. Граев, там же, 12, 279 (1948). ⁴ А. А. Марков, там же, 9, 3 (1945). ⁵ S. Swierczkowski, Proc. London Math. Soc., 14, № 55, 566 (1964). ⁶ А. И. Мальцев, Алгебраические системы, М., 1970.