

В. Н. СТРАХОВ

## УНИВЕРСАЛЬНАЯ СХЕМА ЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком М. А. Садовским 16 X 1972)

1. Основным рабочим инструментом извлечения геологической информации из наблюдаемых значений потенциальных полей (магнитных, гравитационных) в настоящее время является линейный анализ этих полей. Однако теория линейного анализа потенциальных полей развита совершенно недостаточно; в частности, нет четкого определения предмета линейного анализа и вычислительной задачи этого анализа, отсутствуют универсальные схемы решения любых частных задач.

Настоящая заметка представляет собой попытку восполнить эти пробелы, в частности, дать основные положения универсальной схемы линейного анализа потенциальных полей.

2. Элементами физического поля (гравитационного, магнитного) будем называть величины (являющиеся функциями координат), характеризующие закономерности пространственного распределения поля. Так, элементами поля являются составляющие вектора напряженности поля, их первые и вторые производные, а также линейные комбинации этих величин с фиксированными коэффициентами. В каждом поле определим основные элементы как наиболее часто измеряемые величины; так, для гравитационного поля основным элементом будет  $\Delta g = g_z$ , для магнитного —  $\Delta Z$  ( $\Delta g$  и  $\Delta Z$  — вертикальные составляющие напряженности полей).

В качестве канонической области  $K$  задания основных элементов поля будем рассматривать границу раздела земля — воздух в соответствующей идеализированной форме. (В случае двумерной задачи  $K$  есть некоторая незамкнутая кривая, соединяющая бесконечно удаленные точки оси  $Ox$ ; в случае трехмерной задачи  $K$  есть некоторая незамкнутая поверхность, «натяннутая» на бесконечно удаленную окрестность в плоскости  $xOy$ ; наконец, при рассмотрении глобальных проблем под  $K$  понимается замкнутая физическая поверхность Земли). Область  $K$  принимается достаточно регулярной — гладкой или кусочно-гладкой кривой или поверхностью. Внешним по отношению к  $K$  пространством примем пространство, занятое «воздухом»; оно предполагается свободным от источников.

Основной элемент поля в  $K$  обозначим через  $f$  — это функция координат, определенная почти для всех точек  $K$  (ясно, что под значениями  $f$  в точках  $K$  понимаются предельные значения основного элемента из внешности  $K$ ; предельный переход осуществляется по путям, не касательным к  $K$  в соответствующих точках). Функцию  $f$  будем считать элементом некоторого полного линейного нормированного пространства (вещественного)  $X$ .

3. Введем в рассмотрение множество  $X_0^*$  линейных (т. е. аддитивных и однородных) функционалов  $\Phi$  над пространством  $X$ . Принимается, что в  $X_0^*$  входят как ограниченные (непрерывные), так и неограниченные линейные функционалы. Область определения функционала  $\Phi \in X_0^*$  обозначим через  $D(\Phi)$ .

Нетрудно показать, что (числовые) величины, которые обычно находятся методами линейного анализа потенциальных полей, можно рассмат-

ривать как значения некоторых линейных функционалов  $\Phi \in X_0^*$  на функциях  $f \in D(\Phi) \subset X$  — основном элементе поля. При этом, вообще говоря, отнюдь не обязательно считать, что сам элемент  $f$  задан.

Отсюда легко прийти к следующим основным определениям.

**Определение 1.** Предмет линейного анализа потенциальных полей есть нахождение значений  $\Phi(f)$  линейных функционалов  $\Phi \in X_0^*$  на определенных в  $K$  основных элементах  $f \in X$  этих полей.

**Определение 2.** Вычислительная задача линейного анализа потенциальных полей состоит в нахождении (приближенных) значений линейных функционалов  $\Phi(f)$  по заданной совокупности (конечной или бесконечной) приближенных значений  $\varphi_{t, \delta}(f)$  линейных функционалов  $\varphi_t \in X_0^*$  ( $t$  — векторный или скалярный индекс) на определенных в  $K$  основных элементах  $f \in X$  исследуемых полей.

**З а м е ч а н и е.** Очевидно, всегда можно положить

$$\varphi_{t, \delta}(f) = \varphi_t(f) + \delta\varphi_t \quad (1)$$

и при фиксированном  $t$  рассматривать  $\delta\varphi_t$  как значение некоторой случайной величины с некоторым математическим ожиданием и дисперсией. В общем случае значения  $\delta\varphi_t$  при различных значениях  $t$  могут быть коррелированными.

4. Изложим теперь универсальную схему линейного анализа (нахождения функционалов  $\Phi(f)$ ). На практике по заданной совокупности  $\{\varphi_{t, \delta}(f)\}$  приходится находить много различных линейных функционалов  $\Phi(f)$ . Однако очевидно, что принципиально достаточно рассмотреть случай одного функционала.

Проблема нахождения функционала  $\Phi(f)$  решается в два приема.

1) Вводится множество (вспомогательных) линейных функционалов  $F_j(f)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , которое назовем фундаментальными функционалами счета. Эти функционалы в конкретных задачах вводятся по-разному, их выбор произволен в том смысле, что он никак не связан с решаемой задачей и диктуется соображениями технического и математического удобства, желательной точностью решения задачи и т. д.

Общий вид функционалов  $F_j(f)$  таков:

$$F_j(f) = \sum_{p=1}^P v_p \varphi_{tp}(f), \quad (2)$$

где  $v_p$  — числовые коэффициенты; наиболее важный случай

$$F_j(f) = \varphi_{t_j}(f). \quad (3)$$

На практике функционалы  $F_j(f)$  всегда заданы приближенно — по формулам (2), (3), в которых вместо  $\varphi_{tp}(f)$  фигурируют  $\varphi_{tp, \delta}(f)$ . Иначе, известны величины

$$F_{j, \delta}(f) = F_j(f) + \delta F_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Величины  $\delta F_j$  в (4) будем считать случайными; их матрицу ковариации (с элементами  $q_{kl} = \text{cov}(\delta F_k, \delta F_l)$ ) обозначим через  $K$ . В действительности может иметь место одна из двух ситуаций; а) матрица  $K$  известна; б) матрица  $K$  неизвестна.

2) Приближенное значение  $\Phi_{\delta}(f)$  функционала  $\Phi(f)$  ищем в следующей форме (скобки означают скалярное произведение векторов):

$$\Phi_{\delta}(f) = (c(\Phi), F_{\delta}(f)). \quad (5)$$

Здесь  $c(\Phi)$  —  $N$ -мерный вектор с компонентами  $c_j(\Phi)$ ,  $F_{\delta}(f)$  —  $N$ -мерный вектор с компонентами  $F_{j, \delta}(f)$ , причем

$$F_{\delta}(f) = F(f) + \delta F, \quad (6)$$

где  $F(f)$  и  $\delta F$  — векторы с компонентами  $F_j(f)$  и  $\delta F_j$  соответственно.

Ясно, что

$$\Phi_{\delta}(f) = \Phi^*(f) + \delta\Phi, \quad (7)$$

где

$$\Phi^*(f) = (c(\Phi), F(f)), \quad (8)$$

$$\delta\Phi = (c(\Phi), \delta F). \quad (9)$$

Величина  $\Delta\Phi(f) = \Phi(f) - \Phi^*(f)$  есть погрешность метода расчета,  $\delta\Phi$  — погрешность, связанная с погрешностями в задании фундаментальных функционалов счета. Очевидно, основная задача состоит в том, чтобы дать способ нахождения вектора  $c(\Phi)$ , гарантирующий достаточную малость обеих компонент полной погрешности  $\Delta\Phi(f)$  и  $\delta\Phi$ .

Пусть  $\lambda$  — вещественный параметр,  $\Lambda$  — бесконечное множество его значений (счетное или несчетное),  $\{\psi_{\lambda}\}$  — линейно-независимая система функций в  $X$ . Систему  $\{\psi_{\lambda}\}$  назовем  $\Phi$ -полной, если:

а)  $\psi_{\lambda} \in D(\Phi)$  для всех  $\lambda \in \Lambda$ ;

б) каково бы ни было число  $\varepsilon > 0$ , для любого  $f \in D(\Phi)$  всегда найдутся: число  $n$ , числа  $\lambda_i^{(n)}, \alpha_i^{(n)}, i = 1, 2, \dots, n$ , такие, что

$$\left| \Phi(f) - \Phi \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} \psi_{\lambda_k^{(n)}} \right) \right| = \left| \Phi(f) - \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} \Phi(\psi_{\lambda_k^{(n)}}) \right| \leq \varepsilon. \quad (10)$$

1-е условие на коэффициенты  $c_j(\Phi)$  (вектор  $c(\Phi)$ ) наложим такое:

$$\Phi(\psi_{\lambda_k^{(n)}}) = (c(\Phi), F(\psi_{\lambda_k^{(n)}})), \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad (11)$$

его назовем условием аппроксимационной точности.

В пояснение заметим, что в силу линейности функционала  $\Phi$  из (11) следует

$$\Phi(f_n) = \Phi^*(f_n) \quad (12)$$

для любого элемента  $f = f_n \in D(\Phi)$  вида

$$f_n = \sum_{k=1}^n \eta_k \psi_{\lambda_k^{(n)}}, \quad (13)$$

где  $\{\eta_k\}_1^n$  — произвольная совокупность вещественных чисел.

2-е условие на коэффициенты  $c_j(\Phi)$  будет различным в зависимости от того, известна или неизвестна матрица  $K$  ковариаций величин  $\delta F_j$ . Если она известна, то запишем условие в форме  $(\sigma^2(\delta\Phi) - \text{дисперсия } \delta\Phi)$

$$\sigma^2(\delta\Phi) = (c(\Phi), Kc(\Phi)) = \min. \quad (14)$$

Если же она неизвестна, то возьмем условие в форме

$$(c(\Phi), c(\Phi)) = \min. \quad (15)$$

Последнее с очевидностью вытекает из неулучшаемой оценки

$$\gamma_{N_{\Lambda}}^{(K)}(c(\Phi), c(\Phi)) \leq (c(\Phi), Kc(\Phi)) \leq \gamma_1^{(K)}(c(\Phi), c(\Phi)), \quad (16)$$

в которой  $\gamma_1^{(K)}$  и  $\gamma_N^K$  соответственно наибольшее и наименьшее собственные значения симметричной положительно определенной матрицы  $K$ .

Условиями (11), (14) или (11)–(15) вектор  $c(\Phi)$  определяется однозначно; соответствующая задача на условный экстремум является классической задачей теории уравнивания измерений <sup>(1, 2)</sup>. Ее решение дается формулами:

а) в случае условий (11), (14)

$$\Phi_{\delta}(f) = (\mu, AK^{-1}F_{\delta}(f)), \quad (17)$$

где  $\mu$  есть  $n$ -мерный вектор,  $A - (n \times N)$ -матрица с элементами

$$a_{ij} = F_j(\psi_{\lambda_i^{(n)}}) \quad (18)$$

и

$$AK^{-1}A^*\mu = b, \quad (19)$$

$A^* - (N \times n)$ -матрица, транспонированная в  $A$ ,  $b - n$ -мерный вектор с компонентами

$$b_j = \Phi(\psi_{\lambda_j^{(n)}}), \quad (20)$$

б) в случае условий (11), (15)

$$\Phi_{\delta}(f) = (\mu', AF_{\delta}(f)), \quad (21)$$

где

$$AA^*\mu' = b, \quad (22)$$

а  $A, A^*, b$  определены как в предыдущем случае.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
11 X 1972

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Ю. В. Линник, Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений, М., 1962. <sup>2</sup> Н. Д. Дроздов, Линейная алгебра в теории уравнивания измерений, М., 1972.