

В. К. МЕЛЬНИКОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ ДВОЯКОАСИМПТОТИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 15 XII 1972)

Пусть G — область на плоскости (x, y) , ограниченная аналитической кривой C , гомеоморфной окружности. Пусть, далее, T — сохраняющий площадь аналитический гомеоморфизм области G в плоскость (x, y) . Предположим, что существует сохраняющий площадь аналитический гомеоморфизм T^{-1} области G в плоскость (x, y) такой, что $TT^{-1}(\xi) = \xi$ для любой точки $\xi \in (T(G) \cap G)$. Пусть, наконец, s — неподвижная точка отображения T , а Λ_s — асимптотическая кривая, выходящая из точки s , т. е. Λ_s — гомеоморфная интервалу аналитическая кривая такая, что

$$\bar{\Lambda}_s \subset G, \quad \Lambda_s = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(\lambda_\alpha), \quad \rho(s, T^n(\lambda_\alpha)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где λ_α — замкнутая дуга кривой Λ_s , ограниченная парой точек $\alpha \in \Lambda_s$ и $T(\alpha)$. Определим множество $\tilde{\Lambda}_s$, полагая, что точка $\xi \in \tilde{\Lambda}_s$, если существует последовательность точек $\xi_m \in T^{n_m}(\lambda_\alpha)$ такая, что $\xi_m \rightarrow \xi$, а $n_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$.

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. Если $\Lambda_s \cap \tilde{\Lambda}_s = 0$, то любая точка $z \in \tilde{\Lambda}_s$ является неподвижной, т. е. $T(z) = z$.

Доказательство этой теоремы опирается на следующие леммы, в формулировках которых опущено обязательное требование $\Lambda_s \cap \tilde{\Lambda}_s = 0$.

Лемма 1. Пусть ломаная $\mathcal{L} \subset G$ соединяет точки $\alpha \in \Lambda_s$ и $\bar{\alpha} \in \tilde{\Lambda}_s$. Предположим, что

$$\mathcal{L} \cap \tilde{\Lambda}_s = \bar{\alpha}, \quad T(\mathcal{L} \setminus \bar{\alpha}) \cap (\mathcal{L} \setminus \bar{\alpha}) = 0. \quad (2)$$

Предположим, далее, что $\mathcal{L} \cap \Lambda_s = \alpha$.

Тогда найдется $m \neq 0$ такое, что

$$T^m\left(\bigcup_{k=\text{sign } m}^m T^{-k}(\mathcal{L})\right) \subset G, \quad T^m(\mathcal{L} \setminus \bar{\alpha}) \cap (\mathcal{L} \setminus \bar{\alpha}) \neq 0.$$

Лемма 2. Пусть ломаная $\mathcal{L} \subset G$, соединяющая точки $\alpha \in \Lambda_s$ и $\bar{\alpha} \in \tilde{\Lambda}_s$, удовлетворяет условиям (2). Предположим, что

$$\mathcal{L} \cap (\Lambda_s \setminus R_\alpha) = 0, \quad \text{где} \quad R_\alpha = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^k(\lambda_\alpha). \quad (3)$$

Тогда $\mathcal{L} \cap \lambda_\sigma \neq 0$ для любой точки $\sigma \in R_\alpha$.

Лемма 3. Пусть ломаная $\mathcal{L} \subset G$, соединяющая точки $\alpha \in \Lambda_s$ и $\bar{\alpha} \in \tilde{\Lambda}_s$, удовлетворяет условиям (2), (3). Пусть, далее, $a, b \in (\mathcal{L} \cap \Lambda_s)$ — произвольные точки, L — замкнутая дуга кривой Λ_s , ограниченная точками a, b , и l — часть ломаной $\mathcal{L}$, заключенная между этими же точками.

Тогда индекс $J(\eta, K)$ произвольной точки $\eta \in (s \cup \tilde{\Lambda}_s)$ относительно замкнутой кривой $K = L \cup l$ равен нулю.

Лемма 4. Пусть ломаная $\mathcal{L} \subset G$, соединяющая точки $\alpha \in \Lambda_s$ и $\bar{\alpha} \in \tilde{\Lambda}_s$, удовлетворяет условиям (2), (3). Пусть, далее, L_m — дуги множества $\Lambda_s \setminus (\mathcal{L} \cup T(\mathcal{L}))$, один конец которых принадлежит ломаной $\mathcal{L}$, а дру-

гой — кривой $T(\mathcal{L})$. Выберем на ломаной $\mathcal{L}$ и кривой $T(\mathcal{L})$ согласованным образом направление нормали.

Тогда все дуги L_m подходят к ломаной $\mathcal{L}$ с одной и той же стороны и почти все дуги L_m подходят к кривой $T(\mathcal{L})$ с противоположной стороны.

В соответствии с леммой 4 направление, в котором дуги L_m подходят к ломаной $\mathcal{L}$, будем считать положительным. Следовательно, направление, в котором почти все дуги L_m подходят к кривой $T(\mathcal{L})$, будет отрицательным.

Лемма 5. Пусть ломаная $\mathcal{L} \subset G$, соединяющая точки $\alpha \in \Lambda_s$ и $\bar{\alpha} \in \bar{\Lambda}_s$, удовлетворяет условиям (2), (3). Пусть, далее, точки $a, a' \in (\mathcal{L} \cap \Lambda_s)$ и $b, b' \in (T(\mathcal{L}) \cap \Lambda_s)$ лежат на кривой Λ_s в следующем порядке: $T^{-1}(\alpha)$, a , b , b' , a' ; причем на ломаной $\mathcal{L}$ точка a лежит между точками a' и α , а на кривой $T(\mathcal{L})$ точка b лежит между точками b' и $T(\alpha)$. Пусть, наконец, l — часть ломаной $\mathcal{L}$, заключенная между точками a и a' , а l' — часть кривой $T(\mathcal{L})$, заключенная между точками b и b' .

Предположим, что замкнутые дуги L и L' кривой Λ_s , заключенные соответственно между точками a, b и a', b' , удовлетворяют условиям: $L \cap \mathcal{L}' = a$, $L' \cap \mathcal{L}' = a'$, $L \cap \mathcal{L}'' = b$, $L' \cap \mathcal{L}'' = b'$, где $\mathcal{L}'$ — часть ломаной $\mathcal{L}$, заключенная между точками $\bar{a}$ и a , а $\mathcal{L}''$ — часть кривой $T(\mathcal{L})$, заключенная между точками $T(\bar{a})$ и b . Предположим, далее, что $\mathcal{L}' \cap (\Lambda_s \setminus R_a) = \mathcal{L}'' \cap (\Lambda_s \setminus R_a) = 0$.

Тогда область g , ограниченная кривой $K = l \cup L \cup l' \cup L'$, касается ломаной $\mathcal{L}$ с положительной стороны, а кривой $T(\mathcal{L})$ — с отрицательной стороны.

Лемма 6. Пусть ломаная $\mathcal{L} \subset G$, соединяющая точки $\alpha \in \Lambda_s$ и $\bar{\alpha} \in \bar{\Lambda}_s$, удовлетворяет условиям (2), (3). Пусть, далее, точки $a, a' \in (\mathcal{L} \cap \Lambda_s)$ и $b, b' \in (T(\mathcal{L}) \cap \Lambda_s)$ лежат на кривой Λ_s в следующем порядке: $T^{-1}(\alpha)$, a , b , b' , a' ; причем на ломаной $\mathcal{L}$ точка a лежит между точками a' и α , а на кривой $T(\mathcal{L})$ точка b лежит между точками b' и $T(\alpha)$. Пусть, наконец, L, L' и L'' — замкнутые дуги кривой Λ_s , ограниченные соответственно парами точек (a, b) , (a', b') и (b, b') .

Предположим, что выполнены условия $l \cap (\Lambda_s \setminus R_b) = a$, $l \cap R_b = a'$, $l' \cap \Lambda_s = b \cup b'$, где l — часть ломаной $\mathcal{L}$, заключенная между точками a и a' , l' — часть кривой $T(\mathcal{L})$, заключенная между точками b и b' . Предположим, далее, что область f , ограниченная кривой $K' = L'' \cup l'$, касается кривой $T(\mathcal{L})$ с положительной стороны, а область g , ограниченная кривой $K = l \cup L \cup l' \cup L'$, касается кривой $T(\mathcal{L})$ с отрицательной стороны и ломаной $\mathcal{L}$ — с положительной стороны.

Тогда справедливы равенства $L'' \cap l = 0$, $f \cap g = 0$.

Лемма 7. Пусть ломаная $\mathcal{L} \subset G$, соединяющая точки $\alpha \in \Lambda_s$ и $\bar{\alpha} \in \bar{\Lambda}_s$, удовлетворяет условиям (2), (3). Пусть, далее, точки $a, b \in (\mathcal{L} \cap \Lambda_s)$ лежат на кривой Λ_s в следующем порядке: $T^{-1}(\alpha)$, a, b ; причем на ломаной $\mathcal{L}$ точка a лежит между точками α и b . Пусть, наконец, L — замкнутая дуга кривой Λ_s , ограниченная точками a и b , l — часть ломаной $\mathcal{L}$, заключенная между этими же точками.

Предположим, что $l \cap \Lambda_s = a \cup b$, $\mathcal{L}' \cap (\Lambda_s \setminus R_a) = 0$, где $\mathcal{L}'$ — часть ломаной $\mathcal{L}$, заключенная между точками $\bar{a}$ и a . Предположим, далее, что область f , ограниченная кривой $K = L \cup l$, касается ломаной $\mathcal{L}$ с положительной стороны.

Возьмем теперь точку $a^* \in (\mathcal{L}' \cap \Lambda_a)$ так, что выполнено условие: $\mathcal{L}^* \cap (\Lambda_s \setminus T(R_a)) = a^*$, где $\mathcal{L}^*$ — часть ломаной $\mathcal{L}'$, заключенная между точками $\bar{a}$ и a^* . Возьмем, далее, точку $b^* \in (T(R_b) \cap \mathcal{L}^*)$ так, что выполнено условие: $l^* \cap T(R_b) = b^*$, где l^* — часть ломаной $\mathcal{L}^*$, заключенная между точками a^* и b^* . Возьмем, наконец, замкнутую дугу L^* кривой Λ_s , ограниченную точками a^* и b^* .

Тогда $L^* \cap l^* = a^* \cup b^*$ и кривая $K^* = L^* \cup l^*$ ограничивает область f^* такую, что $f \cap f^* = 0$ и $T(f) \subset f^*$. При этом область f^* касается ломаной $\mathcal{L}$ с положительной стороны.

Таким образом, для любой точки $z \in \Lambda_s$ такой, что $T(z) \neq z$, на основании лемм 1—7 нашлась бы область $f_0 \subset G$, удовлетворяющая при любом $k > 0$ условиям $T^k(f_0) \subset G$, $T^k(f_0) \cap f_0 = \emptyset$, что невозможно. Это замечание завершает доказательство теоремы 1.

С другой стороны, если аналитическое сохраняющее площадь отображение T вида $x' = x + f(x, y)$, $y' = y + g(x, y)$ отлично от тождественного, то справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть на плоскости (x, y) дан континуум K такой, что сохраняющее площадь отображение T аналитично в каждой точке $z \in K$ и для любой точки $z \in K$ справедливо равенство $T(z) = z$.

Тогда существует точка $z_0 = (x_0, y_0) \in K$ и аналитическая в окрестности этой точки замена переменных $(x, y) \rightarrow (u, v)$ такая, что в новых переменных отображение T имеет вид

$$u' = u + cv^n + \alpha(u, v)v^n, \quad v' = v + \beta(u, v)v^n,$$

где постоянная $c \neq 0$, целое число $n > 0$ и $\alpha(0, 0) = \beta(0, 0) = 0$. При этом якобиан этой замены переменных равен тождественно единице, а точке z_0 в новых переменных соответствует точка $u = v = 0$.

С помощью теоремы 2 теорема 1 может быть усилена следующим образом.

Теорема 3. Если $\Lambda_s \cap \tilde{\Lambda}_s = \emptyset$, то множество $\tilde{\Lambda}_s$ состоит из единственной и притом неподвижной точки отображения T .

Теорема 3 полностью характеризует случай $\Lambda_s \cap \tilde{\Lambda}_s = \emptyset$. В том случае, когда $\Lambda_s \cap \tilde{\Lambda}_s \neq \emptyset$, важно следующее понятие. Пусть точка $\xi \in \Lambda_s$. Пусть, далее S_ξ — замкнутая дуга кривой Λ_s , ограниченная точками $T(\xi)$ и $T^{-1}(\xi)$. Возьмем $\varepsilon' > 0$ настолько малое, что ε' -окрестность $U_{\varepsilon'}(\xi)$ точки ξ удовлетворяет условиям

$$U_{\varepsilon'}(\xi) \subset G, \quad U_{\varepsilon'}(\xi) \cap (\Lambda_s \setminus T^{-1}(R_\xi)) = \emptyset, \quad U_{\varepsilon'}(\xi) \setminus S_\xi = U_\xi' \cup U_\xi'', \quad (4)$$

где U_ξ' и U_ξ'' — связные множества. Определим теперь множества $P_s' \equiv \Lambda_s$ и $P_s'' \equiv \Lambda_s$ следующим образом. Точка $\xi \in \Lambda_s$ принадлежит множеству P_s' , если существует последовательность точек $\xi_m \in (T^{n_m}(S_\xi) \cap U_\xi')$ такая, что $\xi_m \rightarrow \xi$, а $n_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Множество P_s'' определяется аналогично с помощью области U_ξ'' .

В рассматриваемой нами ситуации справедлива следующая

Теорема 4. Если $\Lambda_s \cap \tilde{\Lambda}_s \neq \emptyset$, то $P_s' = P_s'' = \Lambda_s$.

Предположим теперь, что кроме асимптотической кривой Λ_s , выходящей из точки s , имеется асимптотическая кривая Λ_s^* , входящая в точку s , т. е. предположим, что гомеоморфная интервалу аналитическая кривая Λ_s^* вместе с точкой s удовлетворяют условиям (1), если в них всюду заменить T на T^{-1} . Возьмем далее некоторую точку $\xi \in \Lambda_s$ и фиксированное $\varepsilon' > 0$ настолько малое, что ε' -окрестность $U_{\varepsilon'}(\xi)$ точки ξ удовлетворяет условиям (4). Возьмем, наконец, какую-нибудь точку $\xi^* \in \Lambda_s^*$ и пусть λ_{ξ^*} — замкнутая дуга кривой Λ_s^* , ограниченная точками ξ^* и $T^{-1}(\xi^*)$. Кривую Λ_s^* будем называть соседней кривой первого рода по отношению к кривой Λ_s , если для любого $\delta > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любой точки $z \in U_\xi'$, удовлетворяющей условию $\rho(z, \xi) > \delta$, справедливо неравенство $\rho(T^{-n}(z), \lambda_{\xi^*}) < \varepsilon$ при некотором $n > 0$. Соседняя кривая второго рода определяется аналогично с помощью области U_ξ'' .

В этой ситуации справедлива следующая

Теорема 5. Если $\Lambda_s \cap \tilde{\Lambda}_s \neq \emptyset$, а Λ_s^* — соседняя кривая по отношению к кривой Λ_s , то $\tilde{\Lambda}_s \cap \Lambda_s^* \neq \emptyset$.

Определим теперь множество $\tilde{\Lambda}_s^*$ аналогично множеству $\tilde{\Lambda}_s$.

С помощью теорем 4, 5 доказывается следующая важная

Теорема 6. Если Λ_s^* — соседняя кривая по отношению к кривой Λ_s , а $\Lambda_s \cap \tilde{\Lambda}_s \neq \emptyset$ и $\Lambda_s^* \cap \tilde{\Lambda}_s^* \neq \emptyset$, то $\Lambda_s \cap \Lambda_s^* \neq \emptyset$.

Предположим теперь, что $s \in G$ — неподвижная точка гиперболического типа. Предположим далее, что инвариантные кривые Λ_- и Λ_+ , проходящие через точку s , удовлетворяют условию $(\bar{\Lambda}_- \cup \bar{\Lambda}_+) \subset G$. Полагая $\Lambda_- \setminus s = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Lambda_+ \setminus s = \Lambda_1^* \cup \Lambda_2^*$, мы получим две асимптотические кривые Λ_1 и Λ_2 , выходящие из точки s , и две асимптотические кривые Λ_1^* и Λ_2^* , входящие в точку s . Из теоремы Мозера ⁽¹⁾ следует, что кривая Λ_i^* будет соседней по отношению к кривой Λ_j , $i, j = 1, 2$. Значит, в этой ситуации применима теорема 6. С ее помощью доказывается следующая

Теорема 7. *Предположим, что $\Lambda_i \cap \bar{\Lambda}_i \neq 0$ и $\Lambda_j^* \cap \bar{\Lambda}_j^* \neq 0$ при $i, j = 1, 2$. Тогда, изменив, если нужно, нумерацию кривых Λ_1, Λ_2 , всегда можно выбрать точки $a_1 \in (\Lambda_1 \cap \Lambda_1^*)$ и $a_2 \in (\Lambda_2 \cap \Lambda_2^*)$ такие, что $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \cap (\Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*) = 0$, где Γ_i — открытая дуга кривой Λ_i , заключенная между точками s и a_i , а Γ_j^* — открытая дуга кривой Λ_j^* , заключенная между точками s и a_j , $i, j = 1, 2$.*

Неподвижную точку $s \in G$ отображения T назовем отмеченной, если существует хотя бы одна гомеоморфная полуинтервалу аналитическая кривая $\Lambda' \subset G$, удовлетворяющая одному из следующих условий:

$$1) \Lambda' = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^k(\lambda'_a), \quad \rho(s, T^k(\lambda'_a)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \quad (5)$$

$$2) \Lambda' = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\lambda'_a), \quad \rho(s, T^{-k}(\lambda'_a)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где λ'_a — замкнутая дуга кривой Λ' , ограниченная соответственно точками $a \in \Lambda'$ и $T(a)$ или $a \in \Lambda'$ и $T^{-1}(a)$.

Важное свойство отмеченных неподвижных точек описывает

Теорема 8. *Пусть сохраняющее площадь отображение T вида*

$$x' = \alpha x + \beta y + f(x, y), \quad y' = \gamma x + \delta y + g(x, y)$$

аналитично в некоторой окрестности V точки $\theta = (0, 0)$, а функции f и g в точке θ обращаются в нуль вместе с частными производными первого порядка.

Тогда, если неподвижная точка $\theta = (0, 0)$ — отмеченная, то справедливо неравенство $\alpha + \delta \geq 2$.

С помощью теорем 3, 6, 8 доказывается следующая теорема, содержащая основной результат настоящей работы.

Теорема 9. *Пусть $A \subset G$ — множество неподвижных точек отображения T . Предположим, что множество A — компактно. Пусть, далее, $s_k \in A$ — все отмеченные неподвижные точки отображения T , $k = 1, \dots, k$. Пусть, наконец, кривая $\Lambda_\mu' \subset G$ удовлетворяет условиям (5) вместе с некоторой точкой $s_{\mu\mu}$, $\mu = 1, \dots, m$, а кривая $\Lambda_\nu'' \subset G$, удовлетворяет условиям (6) вместе с некоторой точкой $s_{\nu\nu}$, $\nu = 1, \dots, n$. Предположим дополнительно, что кривые $\Lambda_\mu = \bigcup_{r=0}^{\infty} T^{-r}(\Lambda_\mu')$ и $\Lambda_\nu^* = \bigcup_{r=0}^{\infty} T^r(\Lambda_\nu'')$ удовлетворяют условию $((\bigcup_{\mu=1}^m \bar{\Lambda}_\mu) \cup (\bigcup_{\nu=1}^n \bar{\Lambda}_\nu^*)) \subset G$.*

Тогда $m = n < \infty$ и для любой кривой Λ_μ найдется кривая Λ_μ^ такая, что $\Lambda_\mu \cap \Lambda_\mu^* \neq 0$, а для любой кривой Λ_ν^* найдется кривая Λ_ν такая, что $\Lambda_\nu^* \cap \Lambda_\nu \neq 0$.*

Очевидно, что точки множеств $\Lambda_\mu \cap \Lambda_\nu^* \neq 0$ и $\Lambda_\nu^* \cap \Lambda_\mu \neq 0$ лежат на двоякоасимптотических траекториях отображения T .

Объединенный институт ядерных исследований
Дубна

Поступило
20 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. Moser, Comm. Pure and Appl. Math., 9, 673 (1956).