

В. А. ТУПЧИЕВ

О МЕТОДЕ ВВЕДЕНИЯ ВЯЗКОСТИ В ИЗУЧЕНИИ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ РАЗРЫВА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 24 X 1972)

1. Рассмотрим задачу о распаде разрыва

$$0 = \partial u / \partial t + \partial \varphi(u) / \partial x, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_1, & x \geq 0, \\ u_0, & x < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $u = \{u^1, u^2, \dots, u^n\}$, $\varphi(u) = \{\varphi^1(u), \varphi^2(u), \dots, \varphi^n(u)\}$, причем характеристическое уравнение

$$\det [\varphi_u(u) - E_p] = 0$$

имеет в области $G \subset U_n$, включающей точки u_0, u_1 , все корни вещественные и различные, так что $\rho_1(u) < \rho_2(u) < \dots < \rho_n(u)$, $\varphi^i(u)$ — достаточно гладкие функции.

Будем искать решения задачи (1), (2) как функции $y = x/t$. Тогда задача (1), (2) перейдет в краевую задачу

$$0 = (\varphi_u(u) - E_y) du / dy, \quad (1')$$

$$u(-\infty) = u_0, \quad u(\infty) = u_1. \quad (2')$$

Задача (1'), (2') не разрешима, вообще говоря, в обычном смысле, так как в системе (1') n неизвестных функций, а в условиях (2') — $2n$ соотношений.

Чтобы определить решение (1), (2), введем в систему (1) в левую часть «вязкость» вида $\varepsilon^2 t \frac{\partial}{\partial x} \left(B(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$, которая сохраняет свойство инвариантности системы (1) относительно преобразования подобия $x \rightarrow kx'$, $t \rightarrow kt'$.

Ограничиваясь автомодельными решениями, т. е. решениями с аргументом $y = x/t$, получим соответствующую (1') систему с «вязкостью»

$$\varepsilon^2 d^2 u / dy^2 = (\varphi_u(u) - E_y) du / dy. \quad (3)$$

Система (1') допускает два типа гладких решений: либо $u = \text{const}$ — постоянное решение, либо $u = u_n(y)$ — непостоянное, но на котором выполняется тождественно равенство

$$\det (\varphi_u(u) - yE) = 0. \quad (4)$$

Так как последнее уравнение удовлетворяется при $y = \rho_k(u_n(y))$, то решения его следует различать по индексу k .

Для системы уравнений газодинамики решения последнего типа называют простыми волнами k -го индекса.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1'), (2') назовем вектор-функцию $\bar{u}(y)$, удовлетворяющую системе уравнений (1)–(4) всюду, за исключением конечного числа точек на оси $-\infty < y < \infty$, в которых $\bar{u}(y)$ терпит разрывы первого рода, а также удовлетворяющую краевым условиям (2').

Легко видеть, что участки непрерывности обобщенного решения — это участки указанных выше типов, причем при достаточно больших $|y|$ $\bar{u}(y) = u_0$, если $y < 0$, $\bar{u}(y) = u_1$, если $y > 0$.

Очевидно, задача (1'), (2') имеет бесконечное множество обобщенных решений.

Определение 2. Допустимым обобщенным решением задачи (1'), (2') назовем предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения задачи (3), (2'), равномерный на оси $-\infty < y < \infty$ за исключением сколько угодно малых окрестностей конечного числа точек.

Данное определение показывает, что для построения решения задачи (1'), (2') следует искать предел решения не менее сложной задачи (3), (2'). Это обстоятельство делает определение 2 мало удобным для построения допустимого обобщенного решения задачи (1'), (2'). С другой стороны, ясно, что для выделения допустимого решения достаточно иметь определенные условия только на разрыве решения $\bar{u}(y)$.

Нашей целью будет получение таких условий, исходя из поведения решения задачи (3), (2').

На этом пути введем сначала в системах (1'), (3) новую зависимую вектор-функцию $w = \int u dy$. Тогда (1') и (3) примут следующий вид:

$$0 = \varphi(u) - uy + w, \quad dw/dy = u; \quad (5)$$

$$\varepsilon^2 B(u) du/dy = \varphi(u) - uy + w, \quad dw/dy = u. \quad (6)$$

Согласно определению, $w = \bar{w}(y) = \int \bar{u}(y) dy$ — непрерывная вектор-функция.

Пусть $y = y_0$ — точка разрыва $u = \bar{u}(y)$ со значениями u_- , u_+ слева и справа соответственно.

Введем в системе (6) переменную $\tau = (y - y_0)/\varepsilon^2$ и положим $\varepsilon = 0$. Тогда получим систему

$$B(u) du/d\tau = \varphi(u) - y_0 u + w, \quad dw/d\tau = 0,$$

но $w(0) = w_- = w_+ = y_0 u_{\pm} - \varphi(u_{\pm})$,

и, следовательно,

$$B(u) du/d\tau = \varphi(u) - \varphi(u_-) - y_0(u - u_-). \quad (7)$$

Система (7) называется системой быстрых движений, она обычно хорошо аппроксимирует поведение точного решения задачи (3), (2') на разрыве. Пользуясь этим ее свойством, мы введем условия на разрыве. С этой целью дадим сначала ряд определений.

Определение 3. Устойчивым (неустойчивым) инвариантным многообразием в особой точке u_0 системы (7) назовем многообразие $\mathcal{M}^+(u_0)$ ($\mathcal{M}^-(u_0)$), образованное траекториями системы (7), входящими в особую точку u_0 при $\tau \rightarrow \infty$ ($\tau \rightarrow -\infty$) (1).

Обозначим через $L(u_-)$ множество точек в области $G \subset U_n$, определяемое системой уравнений

$$\varphi(u) - \varphi(u_-) - y(u - u_-) = 0 \quad (8)$$

для $y \in (-\infty, \infty)$. Точку u_- назовем центральной.

Определение 4. Особые точки $u_1, u_2 \in L(u_-)$ при $y = y_0$ назовем соседними, если они соединяются простой дугой, принадлежащей $L(u_-)$, на которой при $y = y_0$ нет других особых точек системы (7).

Назовем цепочкой соседних точек упорядоченный набор попарно соседних особых точек при $y = y_0$ на $L(u_-)$. Простую дугу, принадлежащую $L(u_-)$ и состоящую сплошь из особых точек системы (7) при $y = y_0$, назовем особой дугой.

Сформулируем теперь условия на разрыве. Разрыв компоненты $\bar{u}(y)$

решения при $y = y_0$ со значениями u_- , u_+ слева и справа соответственно является допустимым, если выполнены следующие условия E :

1) точки u_- и u_+ являются соответственно начальной и конечной точками цепочки соседних особых точек $\{u_j\}$ системы (7) при $y = y_0$, пронумерованных в порядке их следования от u_- до u_+ , причем для каждой пары точек u_j и u_{j+1} имеет место неравенство

$$\dim \mathfrak{M}^-(u_j) + \dim \mathfrak{M}^+(u_{j+1}) > n;$$

2) точки u_- и u_+ соединяются особой дугой.

Определение 5. Обобщенное решение задачи (5), (2') (соответственно (1'), (2')), удовлетворяющее на разрывах условиям E , назовем E -допустимым обобщенным решением. Следует отметить, что в случае, когда u — скаляр, условия E совпадают с условиями на разрыве из (2).

2. Остановимся на классификации особых точек системы (7) при $B(u) = E$. Будем обозначать через C простые, а через H — сложные особые точки. В силу гиперболичности системы (1) всякая точка u_0 типа C является седлом, при этом, если характеристическое уравнение

$$\det(\varphi_u(u_0) - E(y_0 + \lambda)) = 0$$

имеет $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} < \dots < \lambda_n$, то u_0 будет обозначаться через $C^{(k)}$.

Сложная изолированная особая точка u_0 типа $H^{(k)}$ характеризуется тем, что $\lambda_k = \rho_k(u_0) - y_0 = 0$, а $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{k-1} < 0 < \lambda_{k+1} < \dots < \lambda_n$.

Сложные особые точки $H^{(k)}$ существенно различаются между собою по следующим типам:

1) Назовем u_0 точкой типа $H_0^{(k)}$, если в этой точке $X_k^i \rho_k(u_0) = 0$ при $i = 1, 2, \dots, m-1$, а $X_k^m \rho_k(u_0) \neq 0$ при m нечетном, где $X_k = r_k(u_0) \nabla$, $r_k(u_0)$ — собственные векторы матрицы $\varphi_u(u_0)$, $|r_k(u_0)| = 1$.

2) u_0 — точка типа $H_{C^{(k-1)}}^{(k)}$, если $X_k^i \rho_k(u_0) = 0$ при $i = 1, 2, \dots, m-1$, а $X_k^m \rho_k(u_0) > 0$ при четном m .

3) u_0 — точка типа $H_{C^{(k)}}^{(k)}$, если $X_k^i \rho_k(u_0) = 0$ при $i = 1, 2, \dots, m-1$, а $X_k^m \rho_k(u_0) < 0$ при четном m .

Имеет место следующая

Теорема 1. Если изолированная особая точка u_0 системы (7) является точкой типа $H^{(k)}$, то возможны только три случая:

1) $\dim \mathfrak{M}^+(u_0) = k$, $\dim \mathfrak{M}^-(u_0) = n - k + 1$ и тогда u_0 типа $H_0^{(k)}$.

2) $\dim \mathfrak{M}^+(u_0) = k - 1$, $\dim \mathfrak{M}^-(u_0) = n - k + 1$ и тогда u_0 типа $H_{C^{(k-1)}}^{(k)}$,

3) $\dim \mathfrak{M}^+(u_0) = k$, $\dim \mathfrak{M}^-(u_0) = n - k$ и тогда u_0 типа $H_{C^{(k)}}^{(k)}$.

Доказательство этой теоремы осуществляется на основе известных теорем, относящихся к исследованию окрестности особой точки с нулевым характеристическим корнем.

Определение 6. Будем говорить, что изолированная особая точка u_0 системы (7) сохраняет свой топологический тип относительно класса матриц $B(u_0)$, включающего E , если $\dim \mathfrak{M}^+(u_0)$ и $\dim \mathfrak{M}^-(u_0)$ остаются неизменными в этом классе.

Совершенно ясно, что в таком классе матриц условия E сохраняются. Это подсказывает, каким должен быть класс матриц $B(u_0)$, чтобы сохранялось неизменным E -допустимое обобщенное решение.

Определение 7. Назовем матрицу $B(u)$ E -допустимой в области G , если для всех $y \in (-\infty, \infty)$ и $u_0 \in G$ сохраняется топологический тип особой точки u_0 системы

$$B(u) du / d\tau = \varphi(u) - \varphi(u_0) - y(u - u_0).$$

На основе проведенной выше классификации особых точек для $n = 2$ показывается следующая

Теорема 2. Для того чтобы невырожденная матрица $B(u)$ была E -допустимой в области G , достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\det B(u) > 0; \quad \text{sp } B(u) > 0, \quad (9)$$

$$\rho_1(u) < \frac{\text{sp } B^{-1}(u) \Phi_u(u)}{\text{sp } B^{-1}(u)} < \rho_2(u) \quad (10)$$

для любой точки $u \in G$.

Согласно теореме 2 в примере из ⁽⁴⁾ матрица вязкости недопустимая. В примере Н. Н. Кузнецова из ⁽³⁾ матрица вязкости недопустимая также, но, чтобы установить это, необходимо изучить случай равенства в условии (10).

Рассмотрим уравнение

$$\det (E\mu + i\gamma\Phi_u(u_0) + \gamma^2 B(u_0)) = 0. \quad (11)$$

Введем следующее условие (Д) из ⁽⁵⁾: для любых действительных $\gamma \neq 0$ корни уравнения (11) удовлетворяют неравенству $\text{Re } \mu \leq -q\gamma^2$. $q > 0$.

Теорема 3. Матрица $B(u)$ является E -допустимой в области $G \subset U_n$, если для любой точки $u_0 \in G$ она удовлетворяет условию (Д), а также условию

$$\text{sign } \Delta_k^B(0, \rho_k(u_0)) = \text{sign } \Delta_k^E(0, \rho_k(u_0)), \quad (12)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$, $\Delta^B(\lambda, y) = \det (\Phi_u(u_0) - yE - \lambda B(u_0))$.

При $n = 2$ условия (12) содержатся в условиях (Д), которые эквивалентны условиям (9), (10).

Замечания. 1) Условия Е в несколько иной и менее полной форме были использованы нами в работах ^(6,7) для доказательства теорем существования и единственности задачи о распаде.

2) Определение 6 близко по смыслу к определению топологической эквивалентности систем. Это в одном из случаев подтверждается в работе ⁽⁸⁾.

3) В работе ⁽⁹⁾ в скалярном случае задачи (1), (2) показано, что предел при $\epsilon \rightarrow 0$ не зависит от наличия t в «вязкости». По-видимому, этого следует ожидать и для векторного случая.

Обнинский филиал
Московского инженерно-физического института

Поступило
24 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958. ² И. М. Гельфанд, УМН, 14, 9, 87 (1959). ³ Б. Д. Рождественский, Н. Н. Яненко, Системы квазилинейных уравнений, «Наука», 1966. ⁴ Э. Б. Быховский, ДАН, 146, № 4, 751 (1962). ⁵ Н. С. Бахвалов, ДАН, 174, № 2, 263 (1967). ⁶ В. А. Тупчиев, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 4, № 5, 817 (1964). ⁷ В. А. Тупчиев, там же, 6, № 3, 527 (1966). ⁸ Л. Э. Рейзинь, Дифференциальные уравнения, 4, № 2, 199 (1968). ⁹ А. С. Калашников, ДАН, 127, № 1, 27 (1959).