

УДК 518:517.944.947

МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КООРДИНАТНЫХ ФУНКЦИЙ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 XII 1972)

В статьях <sup>(1, 2)</sup> был указан способ построения довольно широкого класса координатных функций для вариационно-разностного метода; эти функции получаются сдвигом и изменением масштаба независимых переменных из некоторых фиксированных «исходных» функций. Близкое построение предложено также Стрэнгом и Фиксом <sup>(3, 4)</sup>. Исходные функции должны удовлетворять некоторым соотношениям (формулы (7) статьи <sup>(1)</sup>), гарантирующим полноту соответствующей координатной системы в пространстве  $W_p^{(s)}(\Omega)$ , где  $\Omega$  — любая конечная область  $m$ -мерного эвклидова пространства  $R_m$ . Эти же соотношения (ниже мы будем называть их фундаментальными), гарантируют полноту той же координатной системы и в  $W_p^{(s)}(\Omega)$ , если область  $\Omega$  такова, что любую функцию из  $W_p^{(s)}(\Omega)$  можно продолжить на все пространство  $R_m$  с сохранением класса <sup>(5)</sup>, так будет, например, если  $\partial\Omega \in \text{Lip}_1$  <sup>(6)</sup>.

В статье <sup>(2)</sup> показано, что построение исходных функций, удовлетворяющих фундаментальным соотношениям, удастся провести достаточно просто и сами эти функции имеют достаточно простую структуру, если  $m = 1$  или  $s = 1$ ; уже в случае  $m = s = 2$  исходные функции оказываются довольно громоздкими.

Ж.-П. Обэн <sup>(7)</sup>, используя некоторый специальный класс одномерных координатных функций, предложил строить многомерные координатные функции как произведения одномерных. К сожалению, основное неравенство, характеризующее полноту построенной системы, доказано в <sup>(7)</sup> только для функций некоторого множества, неплотного в соответствующем соболевском пространстве, поэтому доказательство полноты, данное Ж.-П. Обэном, кажется автору недостаточным.

В настоящей заметке прием перемножения одномерных координатных функций будет обоснован для функций, рассмотренных в статьях <sup>(1, 2)</sup>.

Ниже мы сохраняем терминологию и обозначения заметки <sup>(1)</sup>, за одним исключением: вектор или мультииндекс вида  $(a, a, \dots, a)$  будет обозначаться не через  $a$ , а через  $\underline{a}$ .

Пусть  $\tau$  — вещественная переменная и  $\omega_0(\tau), \omega_1(\tau), \dots, \omega_{s-1}(\tau)$  — одномерные исходные функции, подчиненные требованиям заметки <sup>(1)</sup>; в частности, эти функции удовлетворяют фундаментальным соотношениям при  $m = 1$ . Если  $s = 1$ , то положим

$$\sigma_{\underline{0}}(t) = \prod_{k=1}^m \omega_0(t_k), \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_k).$$

Соответствующие координатные функции образуют полную систему в  $W_p^{(1)}$ ; этот случай отмечен в статье <sup>(2)</sup>. Ниже будем считать, что  $s > 1$ . Пусть  $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$  — любой мультииндекс, удовлетворяющий неравенству  $0 \leq |q| \leq s$ . Положим

$$\sigma_q(t) = \prod_{k=1}^m \omega_{q_k}(t_k). \quad (1)$$

Отметим очевидные свойства функций (1):  $\sigma_q \in C^{(s-1)}(R_m) \cap W_p^{(s)}(R_m)$ ;  $\text{supp } \sigma_q \subset \{t: 0 \leq t \leq 2\}$ ;  $D^\alpha \sigma_q(1) = \delta_{\alpha q}$ ,  $0 \leq |\alpha|, |q| \leq s$ .

Рассматривая функции (1) как исходные, можно построить  $m$ -мерные координатные функции вариационно-разностного метода по формуле

$$\Phi_{qjh}(x) = \sigma_q(x/h - j), \quad (2)$$

где  $h$  — произвольное положительное число и  $j$  — произвольный целочисленный вектор. Если  $u(x)$  — достаточно гладкая функция, то можно строить (ср. (1, 2)) ее приближенное выражение в виде

$$u_h(x) = \sum_{|q|=0}^s \sum_j h^{|q|} D^q u((j+1)h) \Phi_{qjh}(x). \quad (3)$$

Допустим, что  $u \in C^{(s)}(\bar{\Omega})$ . Будем рассматривать два случая: либо  $\partial\Omega \in C^{(s)}$ , либо

$$D^\gamma u|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 \leq |\gamma| \leq s.$$

В первом случае, применяя известный прием Хестенса, можно продолжить функцию  $u(x)$  на все пространство  $R_m$  с сохранением класса так, чтобы носитель продолженной функции был компактным; во втором случае мы продолжим функцию  $u(x)$  нулем вне  $\Omega$ . Пусть  $u^*(x)$  — продолженная функция, и пусть ее носитель лежит в кубе  $Q = \{t: 0 \leq t \leq a\}$ . Построим кубическую сетку, меньшие кубы которой имеют ребро  $h$ , а большие — ребро  $2h$ , причем отношение  $a/(2h)$  есть целое число. Выделим из  $h$  меньший куб  $Q_0$  с нижней вершиной  $x_0 = j_0 h$  и оценим величину

$$\int_{Q_0} |D^\alpha u^*(x) - D^\alpha u_h^*(x)|^p dx, \quad |\alpha| = s, \quad (4)$$

где  $u_h^*(x)$  построено по формуле (3) с заменой  $u$  на  $u^*$  и  $\Omega$  на  $Q$ . Для того чтобы система (2) была полна в  $\tilde{W}_p^{(s)}(Q)$ , достаточными будут те условия, при которых интеграл (4) имеет оценку  $o(h^m)$ .

Будем упрощать разность под знаком интеграла (4), отбрасывая слагаемые, которые равномерно стремятся к нулю вместе с  $h$ . Прежде всего заменим  $D^\alpha u^*(x)$  на  $D^\alpha u^*(x_0)$ . Далее, в выражении (3) отличны от нуля только те слагаемые, для которых  $j = j_0 - i$ , так что

$$D^\alpha u_h^*(x) = \sum_{|q|=0}^s \sum_{i \in I} h^{|q|-s} D^q u^*(x_0 + (1-i)h) D^\alpha \sigma_q\left(\frac{x}{h} - j_0 + i\right).$$

Величину  $D^\alpha u_h^*(x_0 + (1-i)h)$  разложим по строке Тейлора в окрестности точки  $x_0$  до членов порядка  $h^{s-|q|}$  включительно. Остаточные члены дадут в интервале (4) величину  $o(h^m)$  и могут быть отброшены. Под знаком интеграла (4) останется полином относительно  $h^{-1}$ ; этот интеграл будет иметь оценку  $o(h^m)$ , если указанный полином будет тождественно равен нулю. Отсюда вытекают соотношения

$$\sum_{q \leq \gamma} \sum_{i \in I} \frac{(1-i)^{\gamma-q}}{(\gamma-q)!} \sigma_q(t+i) = \frac{t^\gamma}{\gamma!}, \quad (5)$$

$$0 \leq |\gamma| \leq s, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

достаточные для того, чтобы

$$\|u^* - u_h^*\|_{\tilde{W}_p^{(s)}(Q)}^p = \int_Q \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha u^*(x) - D^\alpha u_h^*(x)|^p dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (6)$$

Докажем теперь, что соотношения (5) на самом деле выполняются. Фундаментальные соотношения, которым удовлетворяют функции  $\omega_0(\tau)$ ,

$\omega_1(\tau), \dots, \omega_{s-1}(\tau)$ , можно записать в виде

$$\sum_{q_k \leq \gamma_k} \sum_{i_k=0,1} \frac{(1-i_k)^{\gamma_k-q_k}}{(\gamma_k-q_k)!} \omega_{q_k}(t_k+i_k) = \frac{t_k^{\gamma_k}}{\gamma_k!}, \quad 0 \leq \gamma_k \leq s. \quad (7)$$

Возьмем произвольный мультииндекс  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ ,  $\gamma \leq \underline{s}$ , напишем равенства (7) для значений  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ , перемножим эти равенства и положим  $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ . В результате получится, что произведения (1), рассматриваемые для всевозможных значений  $q$ ,  $0 \leq q \leq \underline{s} - 1$ , удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{q \leq \gamma} \sum_{i \in I} \frac{(1-i)^{\gamma-q}}{(\gamma-q)!} \sigma_q(t+i) = \frac{t^\gamma}{\gamma!}, \quad 0 \leq \gamma \leq \underline{s}. \quad (8)$$

Тождества (5) получаются из (8), если рассматривать последние лишь при тех  $\gamma$ , для которых  $0 \leq |\gamma| \leq s$ .

Предельное равенство (6) теперь доказано. Отбросив в нем интеграл по  $Q \setminus \Omega$ , получим

$$\|u - u_h^*\|_{W_p^{(s)}(\Omega)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (9)$$

Соотношение (9) показывает, что система исходных функций (1), в которой мы ограничиваемся значениями  $q$ ,  $0 \leq |q| \leq s$ , порождает по формуле (2) систему координатных функций, которая полна в  $W_p^{(s)}(\Omega)$  в первом из упомянутых выше случаев и в  $W_p^{s(s)}(\Omega)$  — во втором. Используя аппарат средних функций, можно доказать, что в первом случае система (2) полна в  $W_p^{(s)}(\Omega)$  в предположении, что  $\partial\Omega \in \text{Lip}_1$ .

Ленинградский государственный университет  
им. А. А. Жданова

Поступило  
24 XI 1972

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> С. Г. Михлин, ДАН, 200, № 3 (1971). <sup>2</sup> С. Г. Михлин, Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР, 23 (1971). <sup>3</sup> G. Fix, G. Strang, Stud. Appl. Math., 48, № 3 (1969). <sup>4</sup> G. Strang, G. Fix, A Fourier Analysis of the Finite Element Variational Method, Preprint. <sup>5</sup> С. Г. Михлин, ДАН, 209, № 2 (1973). <sup>6</sup> A. P. Calderon, Proc. Symp. in Pure Math., 4, 33 (1961). <sup>7</sup> J.-P. Aubin, J. Math. Anal. and Applications, 21, № 2, 356 (1968).