

В. П. МОТОРНЫЙ

О НАИЛУЧШЕЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ВИДА $\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$
ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. М. Никольским 15 XII 1972)

Рассмотрим некоторый класс H r раз дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций и квадратную формулу С. М. Никольского (см. (1) стр. 90) для функций из этого класса

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k), \quad 0 \leq \rho \leq r-1, \quad (1)$$

где узлы $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ и коэффициенты p_{kl} произвольны.

Пусть

$$R_n^{\rho}(f) = R_n^{\rho}(f; x_k, p_{kl}) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k).$$

Задача о наилучшей квадратурной формуле для класса H , постановка которой принадлежит А. Н. Колмогорову, состоит в том, чтобы найти величину $\mathcal{E}_n^{\rho}(H) = \inf_{p_{kl}} \sup_{x_k, f \in H} |R_n^{\rho}(f)|$, а также систему узлов $\{\bar{x}_k\}$ и весов $\{\bar{p}_{kl}\}$,

для которых достигается точная нижняя грань. Квадратурная формула (1) с узлами $\bar{x}_k$ и весами $\bar{p}_{kl}$ называется наилучшей для класса H .

Решение этой задачи для некоторых классов дифференцируемых функций рассматривалось во многих работах*, но методы исследования формулы (1), являющиеся дальнейшим развитием идей С. М. Никольского (1, 2), по-видимому, не доведены до совершенства, позволившего бы решить задачу о наилучшей квадратурной формуле вида (1) при всех $0 \leq \rho \leq r-1$ и любых r . Точное решение задачи известно лишь для ρ , близких к r ($\rho \geq r-3$). Однако большой интерес представляет исследование квадратурной формулы (1), в которой $\rho = 0$, т. е. формулы вида

$$\sum_{k=1}^n p_k f(x_k). \quad (2)$$

Несмотря на простоту и важность для приложений, решение задачи о наилучшей квадратурной формуле вида (2) известно только для малых r .

В настоящей работе дано решение задачи о наилучшей квадратурной формуле вида (2) для широких классов дифференцируемых периодических функций при любых $r = 1, 2, \dots$. Введем следующие классы функций. H_{ω} — класс 2π -периодических непрерывных функций, модуль непрерывности которых $\omega(f; t) \leq \omega(t)$, где ω — заданный модуль непрерывности. Через $W^r H_{\omega}$, $r = 1, 2, \dots$, будем обозначать класс 2π -периодических функций, у которых r -я производная $f^{(r)}(x) \in H_{\omega}$. При $\omega(t) = t$, положим $W^r =$

* Обстоятельный обзор работ, связанных с изучением квадратурной формулы (1) дан в (4, 5) (см. Добавления, стр. 297).

$= W^{r-1}H_\omega$, $r = 1, 2, \dots$. Пусть, далее, $W^r L$ — класс 2π -периодических функций, имеющих абсолютно непрерывную производную $(r-1)$ -го порядка и таких, что $\int_0^{2\pi} |f^{(r)}(x)| dx \leq 1$.

Для класса H_ω наилучшая квадратурная формула вида (2) найдена в работе (3). При этом использовалась очень простая идея. Сначала просчитывается величина $R_n = \sup_{f \in H_\omega} R_n^0(f; x_k, p_k)$, где $p_k = \frac{2\pi}{n}$, $x_k = \frac{2\pi}{n}k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. R_n является оценкой сверху для величины $\mathcal{E}_n^0(H_\omega)$. Затем для любой системы точек $x = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < 2\pi\}$ строится функция $f_x(t) \in H_\omega$, неотрицательная и обращающаяся в нуль только в этих точках и такая, что $\int_0^{2\pi} f_0(x) dx \leq R_n$. Из этого неравенства следует, что $\mathcal{E}_n^0(H_\omega) = R_n$ и наилучшей квадратурной формулой для класса H_ω является формула прямоугольников

$$\frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n}k\right). \quad (3)$$

Этот прием позволяет легко, в отличие от непериодического случая (см. (1)), решить задачу о наилучшей квадратурной формуле для класса $W^1 H_\omega$ (ω — выпуклый модуль непрерывности). Однако уже для класса W^3 реализация этого приема (см. (6)) сопряжена с определенными трудностями, возникающими как при построении соответствующей для данного случая функции $f_x(t) \in W^3$, так и при оценке интеграла от нее. (Как стало автору известно, задача о наилучшей квадратурной формуле вида (2) для классов W^r , $r \leq 3$, решена В. М. Тихомировым, но решение не опубликовано.)

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

Теорема. Для классов W^r , $r = 4, 5, \dots$, $W^r H_\omega$ (ω — выпуклый модуль непрерывности, r нечетное) и $W^r L$ (r — четное) * наилучшей квадратурной формулой вида (2) является формула прямоугольников (3). При этом имеют место равенства

$$\mathcal{E}_n^0(W^r) = \frac{2\pi K_r}{n^r}, \quad \text{где } K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i(r+1)}}{(2i+1)^{r+1}},$$

$$\mathcal{E}_n^0(W^r H_\omega) = 2\pi \|f_{n,r}\|_{C[0,2\pi]} \quad (r \text{ нечетное}),$$

где $f_{n,r}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$; $r = 0, 1, \dots$) — $2\pi/n$ -периодические функции со средним значением, равным нулю на периоде, у которых r -я производная нечетна и определяется равенствами

$$f_{n,r}^{(r)}(x) = f_{n,0}(x) = \begin{cases} 1/2^\omega(2x), & 0 \leq x \leq \pi/(2n), \\ 1/2^\omega\left(\frac{2\pi}{n} - 2x\right), & \pi/n \leq x \leq \pi/n, \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_n^0(W^r L) = \frac{\pi}{2} \frac{K_{r-1}}{n^r} \quad (r \text{ четное}).$$

Приведем схему доказательства теоремы для класса W^r . Пусть M_n^r — множество функций $f(x)$ из класса W^r , имеющих $2n$ экстремумов на полуинтервале $[0, 2\pi)$ и производные которых $f^{(r)}(x)$, меняя $2n$ раз знак на полуинтервале $[0, 2\pi)$, принимают значения только -1 или 1 . Для некото-

* Для классов $W^r L$, $r = 1, 2, 3$, задача о наилучшей квадратурной формуле решена в работах (4, 7).

рой функции $f(x) \in M_n^r$ рассмотрим точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}$ полуинтервала $[0, 2\pi)$, в которых $f^{(r)}(x)$ меняет знак.

Лемма 1. *Существует окрестность $U_\delta(\xi)$ точки $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{2n-1}$ в пространстве R_{2n-1} , обладающая следующим свойством: для любого $\eta \in U_\delta(\xi)$ найдется точка ξ_{2n}' ($\eta_{2n-1} < \xi_{2n}' < \eta_1 + 2\pi$), такая, что функция $f_\eta(x)$, r -я производная которой $f_\eta^{(r)}(x)$ меняет знак в точках $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{2n-1}, \xi_{2n}'$ (при этом, если $f^{(r)}(x)$ меняет знак в точке ξ_i с «+» на «-», то $f_\eta^{(r)}(x)$ меняет знак в точке η_i в том же порядке), принадлежит множеству M_n^r .*

Рассмотрим любой интервал $(a, a + 2\pi)$, содержащий n точек $x_1, x_2, \dots, x_n$, в которых $f(x)$ имеет минимум. Число δ можно выбрать так, что для любого $\eta \in U_\delta(\xi)$ точки $y_1, y_2, \dots, y_n$, в которых $f_\eta(x)$ достигает минимума, содержатся в интервале $(a, a + 2\pi)$. Положим теперь для любого $\eta \in U_\delta(\xi)$

$$\Phi(\eta) = \{y_1, y_2, \dots, y_n, f(y_2) - f(y_1), f(y_3) - f(y_1), \dots, f(y_n) - f(y_1)\}.$$

Лемма 2. *Существует замкнутая окрестность $\bar{U}_\delta(\xi) \subset U_\delta(\xi)$, которую отображение Φ взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает в пространство R_{2n-1} .*

Затем используя лемму 2 и теорему об инвариантности внутренних точек (см. (8), стр. 196) можно доказать следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любой системы точек $x = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < 2\pi\}$ существует функция $f_x(t) \in M_n^r$, принимающая в этих точках минимальное, равное нулю, значение.*

Далее доказывается неравенство

$$\int_0^{2\pi} f_x(t) dt \geq R_n(W^r), \quad (4)$$

где величины

$$R_n(W^r) = \sup_{f \in W^r} R_n^0\left(f; \frac{2\pi}{n}k, \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2\pi K_r}{n^r}$$

вычислены В. Н. Малоземовым (см. (11, 12)).

При оценке интеграла $\int_0^{2\pi} f_x(t) dt$ широко используются полученные Н. П. Корнейчуком (9) свойства дифференцируемых периодических функций, связанные с перестановками, а также некоторые новые утверждения типа теоремы сравнения А. Н. Колмогорова (10). Из неравенства (4) следует, что наилучшей квадратурной формулой вида (2) для классов W^r является формула прямоугольников (3). Так как производная $f_x'(t)$ обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, то формула прямоугольников будет

наилучшей и среди квадратурных формул вида $\sum_{k=0}^{n-1} \{p_k f(x_k) + p_k' f'(x_k)\}$.

Днепропетровский государственный университет
им. 300-летия воссоединения Украины с Россией

Поступило
13 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. М. Никольский, Квадратурные формулы, М., 1958. ² С. М. Никольский, УМН, 5, 2 (36), 165 (1950). ³ Н. П. Корнейчук, Матем. заметки, 3, № 5, 565 (1968). ⁴ Н. П. Корнейчук, Н. Е. Лушпай, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, № 6, 1416 (1969). ⁵ Дж. Алберт, Э. Нильсон, Дж. Уолш, Теория сплайнов и ее приложения, М., 1972. ⁶ Т. Н. Бусарова, Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям, Днепропетровск, 1972. ⁷ Н. Е. Лушпай, Матем. заметки, 6, № 4, 475 (1969). ⁸ П. С. Александров, Комбинаторная топология, М.—Л., 1947. ⁹ Н. П. Корнейчук, Изв. АН СССР, сер. матем., 35, № 1, 93 (1971). ¹⁰ А. Н. Колмогоров, Уч. зап. Моск.-ковск. унив., в. 30, Математика, № 3, 3 (1939). ¹¹ В. Н. Малоземов, Матем. заметки, 2, № 4, 357 (1967). ¹² В. Н. Малоземов, Вестн. Ленингр. унив., № 1, 52 (1967).