Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 1

УДК 519.35 *МАТЕМАТИКА*

М. М. ХРУСТАЛЕВ

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 27 X 1972)

Пусть $[t_0, t_1]$ — отрезок числовой прямой, X — n-мерное, U — r-мерное эвклидовы пространства с элементами t, $x=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $u=(u_1, u_2, \ldots \ldots, u^r)$ соответственно; $F(x)$ — вещественная функция, заданная на X; $f(x, u)$ — непрерывная функция, отображающая $X\times U$ в X.

Рассмотрим функционал

$$J(x(t), u(t))=F(x(t_1)), \tag{1}$$

заданный на множестве $D(t_0, x_0)$ пар функций $(x(t), u(t))$, определяемом условиями:

1°) $u(t)$ измерима, ограничена и при всех $t\in[t_0, t_1]$ $u(t)\in Q\subset U$;

2°) $x(t)$ абсолютно непрерывна, значение $x(t_0)=x_0$ фиксировано;

3°) п. в. (почти всюду) на T пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dx/dt=f(x, u). \tag{2}$$

Поставим задачу об абсолютном минимуме функционала (1), т. е. об отыскании последовательности $\{(x_\alpha(t), u_\alpha(t))\}\subset D(t_0, x_0)$ (минимизирующей последовательности), на которой $\lim\limits_{\alpha\to\infty} J(x_\alpha(t), u_\alpha(t))=l(t_0, x_0)$, $l(t_0, x_0)=\inf\limits_{D(t_0,x_0)} J(x(t), u(t))$.

Сформулируем дополнительные требования на функции f, F, не входящие в определение множества D:

4°) функция $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на X;

5°) первая и вторая производные функции $f(x, u)$ по x определены и непрерывны на $X\times U$;

6°) для любой точки (τ, x_τ) такой, что $\|x_\tau\|<r$, $t_0\leqslant\tau\leqslant t_1$, существует минимизирующая последовательность $\{(x_\alpha(t), u_\alpha(t))\}\subset D(\tau, x_\tau)$, удовлетворяющая условию $\|(x_\alpha(t), u_\alpha(t))\|<M(r)$. Здесь $\|\cdot\|$ — эвклидова норма соответствующего вектора. Условие 6°) выполнено, например, если существуют постоянные a, b такие, что $\|f(x, u)\|\leqslant a+b\|x\|$ и множество Q ограничено.

В. Ф. Кротовым [1] были получены весьма общие достаточные условия для задачи оптимального управления и высказана гипотеза о необходимости этих условий. В статье для рассматриваемой задачи получены достаточные условия, являющиеся обобщением условий В. Ф. Кротова, и показано существование функции $\varphi(t, x)$, им удовлетворяющей. Эта функция является решением обобщенного уравнения Беллмана. Тем самым доказывается также необходимость и достаточность условий оптимальности в форме обобщенного уравнения Беллмана. Необходимые и достаточные условия, содержащиеся в теореме, не связаны со свойствами решения задачи: существованием решения, свойствами функции Беллмана и др.

Теорема (принцип оптимальности). *Для того чтобы последовательность* $\{(x_\alpha(t), u_\alpha(t))\}\subset D(t_0, x_0)$ *минимизировала функционал* (1) *на* $D(t_0, x_0)$, *достаточно, а если выполнены условия* 4°) — 6°), *то и необходи-*

мо существование вещественной функции $\varphi(t, x)$, заданной на множестве $B = [t_0, t_1] \times X$, и множества $P \subset B$ меры (Лебега) нуль, удовлетворяющих условиям:

1) *$\varphi(t, x)$ локально, т. е. в окрестности каждой точки $(t, x) \in B$, удовлетворяет условию Липшица (в частности, она непрерывна);*

2) *$\varphi(t, x)$ дифференцируема на $B \backslash P$;*

3) $\varphi_x(t, x) f(x, u) + \varphi_t(t, x) \leqslant 0$, $(t, x) \in B \backslash P$, $u \in Q$ (здесь $\varphi_x f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x^i} f^i$);

4) $F(x) + \varphi(t_1, x) \geqslant 0$, $(t_1, x) \in B$;

5) $\lim\limits_{\alpha \to \infty} J(x_\alpha(t), u_\alpha(t)) = -\varphi(t_0, x_0)$.

Кроме того, для любых φ, P, удовлетворяющих условиям 1) — 4), имеет место неравенство

$$J(x(t), u(t)) \geqslant -\varphi(t_0, x_0), \ (x(t), u(t)) \in D(t_0, x_0). \tag{3}$$

Доказательство достаточности. Пусть $(x(t), u(t)) \in D(t_0, x_0)$. Обозначим $y(t) = x(t) + \Delta x$, $\Delta x \in X$. Очевидно, п. в. на $[t_0, t_1]$ $dy/dt = dx/dt = f(x(t), u(t))$. Из теорем теории меры следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор Δx, $\|\Delta x\| < \varepsilon$, такой, что мера тех t, для которых $(t, y(t)) \in P$, равна нулю.

В силу 1) функция $\varphi(t, y(t))$ удовлетворяет условию Липшица на $[t_0, t_1]$ и, следовательно, п. в. дифференцируема. Далее, по теореме о дифференцировании сложной функции,

$$d\varphi(t, y(t))/dt = \varphi_x(t, y(t)) f(x(t), u(t)) + \varphi_t(t, y(t))$$

п. в. на $[t_0, t_1]$. Из 1) также следует, что функция $\|\varphi_x(t, y(t))\|$ ограничена.

Учитывая 3), 4), получим

$$J(x(t), u(t)) = F(x(t_1)) + \varphi(t_1, y(t_1)) - \varphi(t_0, y(t_0)) - \int_{t_0}^{t_1} [d\varphi(t, y(t))/dt]\, dt \geqslant$$

$$\geqslant -\varphi(t_0, x_0) + [\varphi(t_1, y(t_1)) - \varphi(t_1, x(t_1))] + [\varphi(t_0, x(t_0)) - \varphi(t_0, y(t_0))] -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} [\varphi_x(t, y(t))(f(x(t), u(t)) - f(y(t), u(t)))]\, dt.$$

Из этого неравенства, ограниченности функций $y(t)$, $u(t)$, $\|\varphi_x(t, y(t))\|$, непрерывности $\varphi(t, x)$, $f(x, u)$ и произвольности ε следует неравенство (3). Сопоставление (3) с 5) завершает доказательство.

Прежде чем переходить к доказательству необходимости, докажем одно вспомогательное утверждение.

Определение. Вещественную функцию $w(\tau, x_\tau) = -l(\tau, x_\tau)$, определенную на B, будем называть функцией Беллмана.

Пусть $W(r)$ — открытый шар в X радиуса r с центром в начале координат, $B(r) = [t_0, t_1] \times W(r)$.

Лемма. *Если выполнены условия* 4^0) — 6^0), *то функция* $w(\tau, x_\tau) + C\|(\tau, x_\tau)\|^2$ *выпукла на* $B(r)$ *при достаточно большом значении постоянной* C.

Доказательство. Обозначим через $f^*(x, u)$ дважды непрерывно дифференцируемую на $X \times U$ функцию, совпадающую с $f(x, u)$, если $\|(x, u)\| < M(r_1)$, $r_1 > r$, и равную нулю, если $\|(x, u)\| \geqslant r_2 > M(r_1)$.

Фиксируем $(\tau, x_\tau) \in B(r)$ и каждому элементу $(x_\alpha(t), u_\alpha(t))$ минимизирующей последовательности $\{(x_\alpha(t), u_\alpha(t))\} \subset D(\tau, x_\tau)$ поставим в соответствие уравнение $dy_\alpha(t)/dt = f^*(y_\alpha(t), u_\alpha(s))$; $s = \tau + (t_1 - \tau)(t - \xi)/(t_1 - \xi)$, если $\xi < t_1$, и $s = t_1$, если $\xi = t_1$; $y \in X$. Это уравнение на отрезке $[\xi, t_1]$ имеет единственное решение $y_\alpha(t, \xi, \eta)$, удовлетворяющее условию $y_\alpha(\xi, \xi, \eta) = \eta$.

Функция $y_\alpha(t_1, \xi, \eta)$ дважды непрерывно дифференцируема по (ξ, η), в силу свойств $f^*(x, u)$ ее первые и вторые производные ограничены на B, а сама функция ограничена на $B(r)$. Из этого следует, что первые и вторые производные функции $G_\alpha(\xi, \eta) = -F(y_\alpha(t_1, \xi, \eta))$ непрерывны на $B(r)$ и ограничены. Поэтому, при достаточно большом значении постоянной C, функция $G_\alpha(\xi, \eta) + C\|(\xi, \eta)\|^2$ выпукла, что эквивалентно неравенству

$$\beta G_\alpha(\tau + \xi, x_\tau + \eta) + G_\alpha(\tau - \beta\xi, x_\tau - \beta\eta) + C\beta(1 + \beta)\|(\xi, \eta)\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant (1 + \beta) G_\alpha(\tau, x_\tau), \tag{4}$$
$$\beta \geqslant 0, \ (\tau + \xi, x_\tau + \eta), \ (\tau - \beta\xi, x_\tau - \beta\eta) \in B(r).$$

Условие 6°) гарантирует, что всюду на B функция $w(\tau, x_\tau)$ принимает конечные значения. Из определения функций w, f^*, G_α следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$G_\alpha(\tau + \xi, x_\tau + \eta) \leqslant w(\tau + \xi, x_\tau + \eta), \ \|(\xi, \eta)\| < \varepsilon \tag{5}$$

и, так как $y_\alpha(t, \tau, x_\tau) = x_\alpha(t)$, $t \in [\tau, t_1]$,

$$\lim_{\alpha\to\infty} G_\alpha(\tau, x_\tau) = w(\tau, x_\tau). \tag{6}$$

Постоянные C, ε можно выбрать не зависящими от α и выбора точки $(\tau, x_\tau) \in B(r)$.

Из (5), (6) следует, что функцию G_α в (4) можно заменить на w, если $\|(\xi, \eta)\|$, $\|(\beta\xi, \beta\eta)\| < \varepsilon$. Так как (τ, x_τ) — произвольная точка $B(r)$, из этого следует выпуклость функции $w(\tau, x_\tau) + C\|(\tau, x_\tau)\|^2$ на $B(r)$.

Доказательство необходимости. Положим $\varphi(t, x) = w(t, x)$, тогда, по определению функции w,

$$\varphi(t_1, x) + F(x) = 0, \quad x \in X, \tag{7}$$

и для любого $(\tau, x_\tau) \in B(r)$

$$\lim_{\alpha\to\infty} J(x_\alpha(t), u_\alpha(t)) = -\varphi(\tau, x_\tau), \tag{8}$$

если последовательность $\{(x_\alpha(t), u_\alpha(t))\} \subset D(\tau, x_\tau)$ минимизирует J на $D(\tau, x_\tau)$. Из (7), (8) следуют 4), 5).

Из доказанной выше леммы следует выпуклость функции $\varphi(t, x) + C\|(t, x)\|^2$. Так как выпуклая функция почти всюду дифференцируема ([2]) и локально удовлетворяет условию Липшица ([3]), а функция $\|(t, x)\|^2$ обладает теми же свойствами, функция $\varphi(t, x)$ удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы. Остается доказать 3). Пусть существуют $(\xi, \eta) \in B \setminus P$ и $\zeta \in Q$ такие, что $\varphi_x(\xi, \eta) f(\eta, \zeta) + \varphi_t(\xi, \eta) > 0$. Тогда найдется число $\xi' > \xi$ такое, что $w(\xi', \tilde{x}(\xi')) > w(\xi, \eta)$, где $\tilde{x}(t)$ — решение уравнения (2) с начальным условием $x(\xi) = \eta$ и функцией $u(t) = \zeta = \text{const}$.

Пусть $\{(x_\alpha(t), u_\alpha(t))\}$ — последовательность, минимизирующая функционал (1) на $D(\xi', \tilde{x}(\xi'))$. Определим последовательность $\{(y_\alpha(t), v_\alpha(t))\} \subset D(\xi, \eta)$ следующим образом: $v_\alpha = \zeta$, $y_\alpha = \tilde{x}(t)$, если $t \in [\xi, \xi')$, и $v_\alpha(t) = u_\alpha(t)$, $y_\alpha(t) = x_\alpha(t)$, если $t \in [\xi', t_1]$. По построению последовательности $\{(y_\alpha(t), v_\alpha(t))\}$

$$\lim_{\alpha\to\infty} J(y_\alpha(t), v_\alpha(t)) = -w(\xi', \tilde{x}(\xi') < -w(\xi, \eta),$$

что противоречит определению функции $w(\xi, \eta)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Одна и та же функция $\varphi(t, x)$, построенная при доказательстве необходимости условий теоремы, решает задачу об абсолютном минимуме функционала (1) для всех множеств $D(\tau, x_\tau)$, а не только для множества $D(t_0, x_0)$, т. е. так называемую задачу синтеза.

Неравенство 3), рассматриваемое совместно с условиями 1), 2), (7), (8), естественно называть обобщенным уравнением Беллмана. Могут существовать и другие, отличные от функции Беллмана, функции φ (функции Кротова), удовлетворяющие достаточным условиям оптимальности.

Доказанная теорема допускает различные обобщения, в частности, на задачи с фиксированным левым и правым концом, остановиться на которых не позволяет ограниченность объема статьи.

Поступило
25 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Ф. Кротов и др., Новые методы вариационного исчисления в динамике полета, М., 1969. [2] K. Reidemeister, Math. Ann., 83, 1—2, 116 (1921). [3] А. И. Перов, Укр. матем. журн., 18, 3, 129 (1966).