

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

И. Д. НЕЧАЕВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ГРАДИЕНТАМИ И ПРОИЗВОДНЫМИ

(Представлено академиком С. Соболевым 6 XII 1972)

В 1960 г. Опял ⁽¹⁾ показал, что, если $y(x) \in C'$ на $0 \leq x \leq b$ и удовлетворяет условиям $y(0) = y(b) = 0$, $y(x) > 0$, то

$$\int_0^b |yy'| dx \leq \frac{b}{4} \int_0^b y'^2 dx.$$

Постоянная $b/4$ наилучшая. В дальнейшем данное неравенство пере- доказывалось более простыми методами и обобщалось в различных направ- лениях (см., например, ⁽²⁻⁷⁾).

В настоящей заметке приводятся теоремы, которые обобщают некото- рые известные результаты на многомерный случай, причем производная в этом случае изменяется на градиент.

В дальнейшем через $u_1(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ будем обозначать функцию $u(x_1, \dots, x_n)$ после перехода к обобщенным полярным координатам. Ана- логичные обозначения применим и к другим функциям.

Теорема 1. Пусть $u(x_1, \dots, x_n)$ — дифференцируемая функция, оп- ределенная в выпуклой ограниченной области $V \subset \mathbb{R}^n$, причем существует точка $(x_1^0, \dots, x_n^0) \in V$ такая, что $u(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0$. Если $S(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ — неотрицательные измеримые функции в V ,

$$\int_0^{R_m} (g_1(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \rho^{n-1})^{-1/(p+q-1)} d\rho < \infty,$$

где $R_m = \max_{\bar{x} \in \partial V} |\bar{x} - \bar{x}^0|$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, $p + q \geq 1$ и $pq > 0$ или $p < 0$, $q < 0$, то справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_V S(x_1, \dots, x_n) \cdot |u(x_1, \dots, x_n)|^p \cdot |\nabla u(x_1, \dots, x_n)|^q dx_1 \dots dx_n \leq \\ \leq \left(\frac{q}{p+q} \right)^{q/q} \int_V K(x_1, \dots, x_n, p, q) \cdot g(x_1, \dots, x_n) \times \\ \times |\nabla u(x_1, \dots, x_n)|^{p+q} \times dx_1, \dots, dx_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} K_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, p, q) = \\ = \left\{ \int_0^{R(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} r^{n-1} S_1^{(p+q)/p}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) g_1^{-q/p}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \times \right. \\ \left. \times \left[\int_0^r (g_1(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \rho^{n-1})^{-1/(p+q-1)} d\rho \right]^{p+q-1} dr \right\}^{p/(p+q)}. \end{aligned}$$

Равенство в неравенстве (1) имеет место тогда и только тогда, когда

- 1) $u_1 = u_r(r)$,
- 2) $g_1 r^{n-1} |\nabla u_1|^{p+q} = c_1 (g_1 r^{n-1})^{-1/(p+q-1)}$,

$$3) \left\{ \int_0^r (g_1 \rho^{n-1})^{-1/(p+q-1)} d\rho \right\}^{(1-p)/q} = c_2 r^{(n-1)/(p+q-1)} S_1^{1/p} g_1^{(1-q)/(p+q-1)}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы 1.

1) Пусть V — n -мерный шар радиуса R , $(x_1^0, \dots, x_n^0) = (0, \dots, 0)$, $g_1 = r^\alpha$, $p+q > 1$, $pq > 0$ и $p+q-n-\alpha > 0$ или $p < 0$, $q < 0$ и $p+q-n-\alpha < 0$; тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \int_V r^{\frac{(p+q)(1-q)(p-\alpha)-p(n-q)}{q(p+q-1)}} |u|^p |\nabla u|^q dv \leq \\ & \leq \frac{q}{p+q} \left(\frac{p+q-1}{p+q-n-\alpha} \right)^p R^{\frac{p(p+q-n-\alpha)}{q(p+q-1)}} \int_V r^\alpha |\nabla u|^{p+q} dv, \end{aligned} \quad (2)$$

причем равенство имеет место при $u = cr^{(p+q-n-\alpha)/(p+q-1)}$.

При $\alpha = 0$ неравенство (2) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_V r^{\frac{p(p+q)(1-q)-p(n-q)}{q(p+q-1)}} |u|^p |\nabla u|^q dv \leq \\ & \leq \frac{q}{p+q} \left(\frac{p+q-1}{p+q-n} \right)^p R^{\frac{p(p+q-n)}{q(p+q-1)}} \int_V |\nabla u|^{p+q} dv, \end{aligned} \quad (3)$$

где $p+q > n$, $pq > 0$ или $p < 0$, $q < 0$.

Если в неравенстве (2) положим

$$\alpha = \frac{p(p+q)(1-q)-p(n-q)}{(p+q)(1-q)},$$

то получим

$$\begin{aligned} & \int_V |u|^p |\nabla u|^q dv \leq \\ & \leq \frac{q}{p+q} \left[\frac{(p+q)(1-q)}{q(n-q)} \right]^p R^{\frac{p(n-q)}{(p+q)(1-q)}} \int_V r^{\frac{p(p+q)(1-q)-p(n-q)}{(p+q)(1-q)}} |\nabla u|^{p+q} dv, \end{aligned} \quad (4)$$

где $p+q > 1$, $p > 0$, $0 < q < 1$ или $q > n$, либо $p < 0$, $q < 0$.

2) При $n = 1$ из неравенства (1) получаются некоторые известные неравенства. Пусть $V \equiv [a, b]$ и пусть $u(a) = 0$. Тогда, если $g = (x-a)^\alpha$, $p+q > 1$, $pq > 0$ и $p+q-1-\alpha > 0$ или $p < 0$, $q < 0$ и $p+q-1-\alpha < 0$, то справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \int_a^b (x-a)^{\frac{(p+q)(1-q)(p-\alpha)-p(1-q)}{q(p+q-1)}} |u|^p |u'|^q dx \leq \\ & \leq \frac{q}{p+q} \left(\frac{p+q-1}{p+q-1-\alpha} \right)^p (b-a)^{\frac{p(p+q-1-\alpha)}{q(p+q-1)}} \int_a^b (x-a)^\alpha |u'|^{p+q} dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Положим в (5) $a = 0$, $p = q = 1$, $\alpha = 0$, тогда получим неравенство Ояла (1)

$$\int_0^b |uu'| dx \leq \frac{b}{2} \int_0^b |u'|^2 dx. \quad (6)$$

Если $u(b) = 0$, то константа $b/2$ в (6) должна быть заменена на $b/4$. Полагая в (5) $a = 0$, $p = l - 1$, $\alpha = 0$, $q = 1$, получим неравенство Ло-кен Хуа (2). Из неравенств (2), (5) следует также ряд неравенств, полученных в (4-6).

З а м е ч а н и е. Теорему, аналогичную теореме 1, можно доказать для произвольных выпуклых функций.

Т е о р е м а 2. Пусть $u(x_1, \dots, x_n)$ — дифференцируемая функция, определенная в выпуклой ограниченной области $V \subset \mathbb{R}^n$, причем существует точка $(x_1^0, \dots, x_n^0) \in V$ такая, что $u(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0$. Если $F(z)$ — вогнутая и возрастающая, $\varphi(z)$ — выпуклая и возрастающая функции, когда

$z > 0$; $f(x_1, \dots, x_n) > 0$, $g_1(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \int_0^r \rho^{n-1} f_1(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) d\rho$, то

справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \int_V f(x_1, \dots, x_n) \cdot \varphi \left(\frac{|\nabla u(x_1, \dots, x_n)|}{g'_r(x_1, \dots, x_n)} \right) \times \\ & \times F' \left\{ g(x_1, \dots, x_n) \cdot \varphi \left(\frac{|u(x_1, \dots, x_n)|}{g(x_1, \dots, x_n)} \right) \right\} dx_1, \dots, dx_n \leq \\ & \leq cF \left(\frac{1}{c} \int_V \frac{g'_r(x_1, \dots, x_n)}{r^{n-1}} \cdot \varphi \left(\frac{|\nabla u(x_1, \dots, x_n)|}{g'_r(x_1, \dots, x_n)} \right) dx_1, \dots, dx_n \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $c = 2\pi^{n/2} / \Gamma(n/2)$ для $n = 2, 3, \dots$ и $c = 1$ для $n = 1$.

Равенство в (7) имеет место тогда и только тогда, когда $u = cg(r)$.

Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы 2.

1) Пусть V — n -мерный шар радиуса R , $\varphi(z) = z^p$, $F(z) = z^q$, где $p \geq 1$, $0 < q \leq 1$, $f_1 = r^\alpha$, $n + \alpha > 0$, $s = p(1 - q)$, $(x_1, \dots, x_n) \equiv (0, \dots, 0)$; при таком выборе получим

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_V r^{(n+\alpha)(1-p)(p-s)+p(p-n)/p} |\nabla u|^p |u|^{-s} dv \right\}^{1/(p-s)} \leq \\ & \leq \left(\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \right)^{s/p(p-s)} \left(\frac{p}{p-s} \right)^{1/(p-s)} (n + \alpha)^{s(p-1)/p(p-s)} \left\{ \int_V r^{\alpha-p(n+\alpha-1)} |\nabla u|^p dv \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (8)$$

Равенство в (8) имеет место при $u = cr^{n+\alpha}$. Выберем в (8) $\alpha = -p(n-1)/(p-1)$. Тогда при $p > n$

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_V r^{s(p-n)/p} |\nabla u|^p |u|^{-s} dv \right\}^{1/(p-s)} \leq \\ & \leq \left(\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \right)^{s/p(p-s)} \left(\frac{p}{p-s} \right)^{1/(p-s)} \left(\frac{p-n}{p-1} \right)^{s(p-1)/p(p-s)} \left\{ \int_V |\nabla u|^p dv \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (9)$$

При $\alpha = \frac{ns(1-p) - p^2(1-n)}{(1-p)(p-s)}$, $p > n$ из неравенства (8) получим

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_V |\nabla u|^p |u|^{-s} dv \right\}^{1/(p-s)} \leq \left(\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \right)^{s/p(p-s)} \left(\frac{p}{p-s} \right)^{1/(p-s)} \times \\ & \times \left[\frac{p(n-p)}{(1-p)(p-s)} \right]^{s(p-1)/p(p-s)} \left\{ \int_V r^{s(n-p)/(p-s)} |\nabla u|^p dv \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (10)$$

2) Положим теперь в теореме 2 $n = 1$, $V = [a, b]$, $u(a) = 0$, а функции $\varphi(z)$ и $F(z)$ выберем такими же, как при получении неравенства (8). Тогда

справедливо неравенство

$$\left\{ \int_a^b (x-a)^{(1-p)(ap-as-s)/p} |u'|^p |u|^{-s} dx \right\}^{1/(p-s)} \leq \left(\frac{p}{p-s} \right)^{1/(p-s)} (1+\alpha)^{s(p-1)/p(p-s)} \left\{ \int_a^b (x-a)^{\alpha(1-p)} |u'|^p dx \right\}^{1/p}. \quad (11)$$

Положим в (11) $1+\alpha=\beta$, $s=-q$, $a=0$. Получим

$$\left\{ \int_0^b x^{(1-p)(\beta q+\beta p-p)/p} |u'|^p |u|^q dx \right\} \leq \frac{p}{p+q} \beta^{q(1-p)p(p+q)} \left\{ \int_0^b x^{(\beta-1)(1-p)} |u'|^p dx \right\}^{1/p}, \quad (12)$$

которое рассматривалось в (5). Аналогичным образом можно получить и многие другие известные неравенства.

Доказательство сформулированных теорем существенно опирается на неравенство Гёльдера и неравенство Иенсена для выпуклых и вогнутых функций.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Поступило
6 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Z. Opial, Ann. Polon. Math., 8, 29 (1960). ² L. K. Hua, Scientia sinica, 14, № 5, 789 (1965). ³ K. M. Das, Proc. Am. Math. Soc., 22, № 1, 258 (1969). ⁴ P. R. Beesack, K. M. Das, Pacif. J. Math., 26, № 2, 215 (1968). ⁵ Г. И. Розанова, Уч. зап. Московск. гос. пед. инст. им. В. И. Ленина, 460, 58 (1972). ⁶ Г. И. Розанова, Там же, 460, 66 (1972). ⁷ D. W. Boyd, Pacif. J. Math., 30, № 2, 367 (1969).