Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 5

УДК 550.30 + 631.436 **ГЕОФИЗИКА**

Ф. М. УРМАНЦЕВ

ТЕПЛОВЫЕ НАКЛОНЫ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком М. А. Садовским 16 XII 1971)

Распределение температуры в верхних частях земной коры вследствие суточных изменений температуры может быть найдено из уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{h^2}\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta^2 v, \qquad (1)$$

где h — коэффициент температуропроводности.

Граничное условие — распределение температуры на поверхности — запишем в комплексной форме

$$v|_{z=0} = v_0 e^{i\omega t}\cos\varphi x\cos\psi y, \qquad (2)$$

где v_0 — амплитуда суточных изменений температуры, ω — частота, $\varphi = 2\pi / L_1$, $\psi = 2\pi / L_2$; L_1, L_2 — параметры, учитывающие неравномерность нагрева поверхности из-за рельефа, различных теплопроводных свойств пород, растительности и др.

Рассмотрим только квазистатический случай, т. е. будем считать, что температурное поле не зависит от вызываемых им деформаций.

Температура верхних частей земной коры, удовлетворяющая граничному условию (2), также носит периодический характер,

$$v = f(z)\,e^{i\omega t}\cos\varphi x\cos\psi y,$$

и ограничена на бесконечности;

$$v = v_0 e^{i\omega t-\tau z}\cos\varphi x\cos\psi y, \qquad (3)$$

где $\tau^2 = ik^2 + \varepsilon^2$, $\varepsilon^2 = \varphi^2 + \psi^2$, $k^2 = \omega / h^2$.

Для решения задач теории упругости в перемещениях имеются уравнения Ламе. Если первое из них продифференцировать по x, второе по y, третье по z и затем сложить, то получим следующее уравнение:

$$\Delta^2\theta = \alpha\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\Delta^2 v, \qquad (4)$$

где θ — объемная деформация, σ — коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного расширения.

Воспользуемся подстановкой, предложенной Паркусом ([2]), $u = \partial\Phi / \partial x$, $v = \partial\Phi / \partial y$, $w = \partial\Phi / \partial z$, $\Phi = R + F$.
Тогда

$$\Delta^2\Delta^2 F + \Delta^2\Delta^2 R = \alpha\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\Delta^2 v.$$

Следовательно, решение уравнения (4), как и в случае плоской задачи теории упругости в напряжениях ([1]), сводится к определению бигармонической функции F:

$$\Delta^2\Delta^2 F = 0 \qquad (5)$$

и функции R, удовлетворяющей уравнению Пуассона

$$\Delta^2 R = \alpha\frac{1+\sigma}{1-\sigma}v. \qquad (6)$$

Решения уравнений (5) и (6) носят периодический характер и ищутся в форме

$$F = f_1(z) \cos \varphi x \cos \psi y,$$
$$R = f_2(z) \cos \varphi x \cos \psi y, \tag{7}$$
$$\Phi = \left(c_1 e^{-\varepsilon z} + c_2 z e^{-\varepsilon z} + \frac{\alpha v_0}{ik^2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} e^{i\omega t - \tau z}\right) \cos \varphi x \cos \psi y.$$

Две другие постоянные в (7) приравнены нулю, чтобы удовлетворить условию ограниченности перемещений на больших глубинах.

Одну постоянную в (7) найдем из условия отсутствия нагрузок на поверхности

$$z_z \big|_{z=0} = 0. \tag{8}$$

Вторую постоянную наиболее просто можно определить, исходя из следующего. При суточном прогреве поверхности вполне можно принять, что

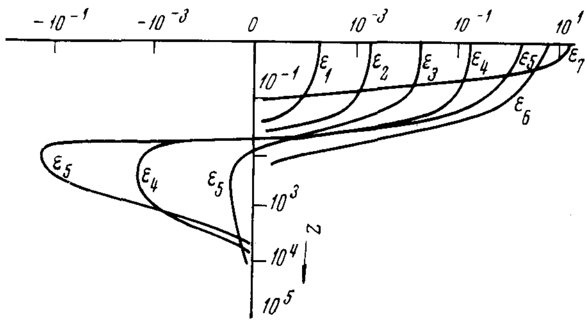

Рис. 1. Зависимость наклонов от глубины и размера площадок неоднородностей

частицы в основном перемещаются в вертикальной плоскости. Перемещения частиц в горизонтальной плоскости значительно меньше. Для простоты решения задачи положим их равными нулю. Тем самым мы сужаем круг решения задачи. В решении задачи будут отсутствовать перемещения по осям Ox и Oy, горизонтальные и угловые деформации в плоскости xOy. Останутся лишь перемещения по оси Oz. Но выражения для их расчетов получатся наиболее удобными и компактными.

Отсутствие угловых деформаций в горизонтальной плоскости приводит к условию

$$\varepsilon_{xy} = \partial v / \partial x + \partial u / \partial y = 0, \tag{9}$$

или

$$\partial^2 \Phi / \partial x \, \partial y = 0.$$

Отсюда

$$c_1 = -\frac{\alpha v_0}{ik^2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} e^{i\omega t}.$$

Из условия (8) получаем $c_2 = 0$.

$$\Phi = -\frac{\alpha v_0}{k^2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} i e^{i\omega t} \left(-e^{-\varepsilon z} + e^{-\tau z}\right) \cos \varphi x \cos \psi y. \tag{10}$$

Составляющие наклонов по осям Ox и Oy получаем из выражений Таким образом,

$$\xi = \partial^2 \Phi / \partial x \, \partial z, \qquad \eta = \partial^2 \Phi / \partial y \, \partial z,$$
$$\left\| \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\| = \frac{\alpha v_0}{k^2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \left\| \begin{matrix} \varphi \\ \psi \end{matrix} \right\| i e^{i\omega t} \left(\varepsilon e^{-\varepsilon z} - \tau e^{-\tau z}\right) \left\| \begin{matrix} \sin \varphi x \cos \psi y \\ \cos \varphi x \sin \psi y \end{matrix} \right\|. \tag{11}$$

Наклоны получены в комплексной форме. Из них следует выделить действительную часть. Рассмотрим несколько вариантов.

1) $\varepsilon \ll k$; можно принять $\tau = k / \sqrt{2} + ik / \sqrt{2}$. Тогда

$$\left\|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\| = \frac{\alpha\nu_0}{k^2}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\left\|\begin{matrix}\varphi\\ \psi\end{matrix}\right\|\left[-\varepsilon\sin\omega t e^{-\varepsilon z} + k\cos\left(\omega t - \frac{kz}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right)e^{-kz/\sqrt{2}}\right]\times$$
$$\times\left\|\begin{matrix}\sin\varphi x\cos\psi y\\ \cos\varphi x\sin\psi y\end{matrix}\right\|.$$

2) $\varepsilon = k$; $\tau = \dfrac{k}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}} + ik\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

$$\left\|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\| = \frac{\alpha\nu_0}{k^2}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\left\|\begin{matrix}\varphi\\ \psi\end{matrix}\right\|\left\{-\sin\omega t e^{-kz} + \left[\frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}\sin(\omega t -\right.\right.$$
$$\left.- k\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}z + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\cos\left(\omega t - k\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}z\right)\right]\times$$
$$\left.\times\exp\left(-\frac{kz}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}\right)\right\}\left\|\begin{matrix}\sin\varphi x\cos\psi y\\ \cos\varphi x\sin\psi y\end{matrix}\right\|.$$

3) $\varepsilon > k$; с достаточной точностью можно написать $\tau = \varepsilon + i\frac{k^2}{2\varepsilon}$.

$$\left\|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\| = -\frac{\alpha\nu_0}{k^2}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\left\|\begin{matrix}\varphi\\ \psi\end{matrix}\right\|\left[\varepsilon\sin\omega t - \frac{k^2}{2\varepsilon}\cos\left(\omega t - \frac{k^2 z}{2\varepsilon}\right) -\right.$$
$$\left.\times\varepsilon\sin\left(\omega t - \frac{k^2 z}{2\varepsilon}\right)\right]e^{-\varepsilon z}\left\|\begin{matrix}\sin\varphi x\cos\psi y\\ \cos\varphi x\sin\psi y\end{matrix}\right\|.$$

4) $\varepsilon \gg k$; в этом варианте $\xi = \eta = 0$.

На рис. 1 по приведенным формулам построен график зависимости наклонов от глубины и размера неоднородности. Были приняты $\varphi = \psi$, $\varepsilon_0 = 0$ (неоднородности отсутствуют), $\varepsilon_1 = 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = 10^{-5}$, $\varepsilon_3 = 10^{-4}$, $\varepsilon_4 = 10^{-3}$, $\varepsilon_5 = 10^{-2}$, $\varepsilon_6 = 10^{-1}$, $\varepsilon_7 = 1$, $\alpha = 10^{-5}$, $k = 10^{-1}$ см$^{-1}$, $\nu_0 = 10°$, $\sigma = 0{,}3$.

Расчеты наклонов проведены для $\sin\varphi x\cos\psi y = 1$ или $\cos\varphi x\sin\psi y = 1$, $\omega t = {}^1/_4\pi$, при которых они принимают максимальные значения.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Лебедев, Температурные напряжения в теории упругости, М.— Л., 1937. [2] Г. Паркус, Неустановившиеся температурные напряжения, М., 1963.