Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 5

УДК 539.12 ФИЗИКА

А. Ф. РАДЮК, академик АН БССР Ф. И. ФЕДОРОВ

ФЕРМИОН С АНОМАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

В работе ([1]) Д. М. Волков впервые получил точное решение для дираковского электрона в поле плоской электромагнитной волны. В работе ([2]) был предложен общий метод отыскания точных решений для частиц с различными спинами в таком поле. В настоящей работе этот метод применяется для получения точного решения для частицы со спином $^1/_2$ в поле плоской электромагнитной волны при учете взаимодействия Паули. Как известно, это взаимодействие феноменологически учитывает структуру частицы, которая, в частности, проявляется в наличии аномального магнитного момента у нуклонов.

Уравнение для частицы со спином $^1/_2$ в электромагнитном поле при учете взаимодействия Паули имеет вид

$$[\gamma^k(\partial_k - iA_k) + i\varkappa\gamma^{kl}F_{kl} + m]\psi = 0; \tag{1}$$

здесь $(A_k) = A$, F_{kl} — вектор-потенциал и тензор напряженности электромагнитного поля, умноженные на заряд частицы, $\gamma^{kl} = {}^1/_2(\gamma^k\gamma^l - \gamma^l\gamma^k)$, $\varkappa$ — параметр взаимодействия Паули, m — масса частицы. В случае плоской электромагнитной волны $A = af(\varphi)$. Согласно ([2]), волновую функцию ψ ищем в виде

$$\psi = \chi(\varphi)e^{ipx}, \tag{2}$$

где $\varphi = kx = k_lx_l = \mathbf{kx} - k_0x_0$, $k = (k_l) = (\mathbf{k}, ik_0)$ — волновой вектор, $k^2 = ka = 0$, p — 4-импульс частицы. Из алгебры матриц Дирака γ^k следуют соотношения

$$\hat{b}\hat{c} + \hat{c}\hat{b} = 2bc, \quad \hat{k}^2 = \hat{k}\hat{a}\hat{k} = 0, \quad \hat{a}\hat{k} + \hat{k}\hat{a} = 0, \tag{3}$$

где $\hat{b} = b_k\gamma^k$. Подставляя (2) в (1), находим уравнение для χ:

$$\hat{k}\chi' + (iB + m)\chi = 0, \quad B = \hat{b} + 2\varkappa f'\hat{k}\hat{a}, \quad b = p - af. \tag{4}$$

Применяя рассуждения, изложенные в ([2]), получим, что функцию χ следует искать в виде

$$\chi = (iB + m)^{-1}\hat{k}\chi_1, \tag{5}$$

где χ_1 — произвольная вектор-функция от φ.

Минимальное уравнение для оператора B имеет вид (см. (3))

$$(B^2 - b^2 + d)(B^2 - b^2 - d) = 0, \quad d = 4\varkappa|a|f'kp, \quad |a| = \sqrt{a^2}; \tag{6}$$

с его помощью находим обратный оператор

$$(iB + m)^{-1} = \frac{1}{q^2 - d^2}(B^2 + m^2 - 2q)(iB - m),$$
$$q = b^2 + m^2 = f(fa^2 - 2ap). \tag{7}$$

В связи с произвольностью χ_1 удобно ввести в (5) скалярный множитель и искать функцию χ в виде

$$\chi = q(1 - \alpha^2)(iB + m)^{-1}\hat{k}\chi_1, \quad \alpha = d/q. \tag{8}$$

Подстановка в (4) приводит к следующему уравнению для χ_1:

$$(1+\alpha\hat{a}_1)\,\hat{k}\chi_1' + \left[\alpha'\hat{a}_1 + \frac{iq}{2kp}(1-\alpha^2)\right]\hat{k}\chi_1 = 0, \quad a_1 = \frac{a'}{|a|},$$

или, поскольку $(1+\alpha\hat{a}_1)^{-1} = (1-\alpha\hat{a}_1)\,/\,(1-\alpha^2)$,

$$\hat{k}\chi_1' = R\hat{k}\chi_1, \quad R = \frac{\alpha\alpha'}{1-\alpha^2} - \frac{iq}{2kp} + \left(\frac{iq\alpha}{2kp} - \frac{\alpha'}{1-\alpha^2}\right)\hat{a}_1. \tag{9}$$

Благодаря соотношению $\left[R, \int R\,d\varphi\right]_- = 0$ это уравнение непосредственно интегрируется:

$$\hat{k}\chi_1 = e^{\int R\,d\varphi}\,\hat{k}\chi_0, \tag{10}$$

где χ_0 — постоянный вектор. При этом

$$\int R\,d\varphi = -\frac{1}{2}\ln(1-\alpha^2) - \frac{i}{2kp}\int q\,d\varphi + \left(2i\varkappa\,|a|\,f - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\hat{a}_1,$$

следовательно,

$$\hat{k}\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,e^{-\frac{i}{2kp}\int q\,d\varphi}(\operatorname{ch}F + \hat{a}_1\operatorname{sh}F)\,\hat{k}\chi_0, \quad F = 2i\varkappa\,|a|\,f - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \tag{11}$$

и, согласно (8),

$$\chi = q\sqrt{1-\alpha^2}\,e^{-\frac{i}{2kp}\int q\,d\varphi}(i\hat{B}+m)^{-1}(\operatorname{ch}F + \hat{a}_1\operatorname{sh}F)\,\hat{k}\chi_0. \tag{12}$$

Учитывая (7), это выражение можно преобразовать к виду

$$\chi = \frac{\operatorname{ch}F + \alpha\operatorname{sh}F}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,e^{-\frac{i}{2kp}\int q\,d\varphi}\,S\chi_0, \tag{13}$$

где

$$S = (m - i\hat{b})(1+\beta\hat{a}_1)\,\hat{k}, \quad \beta = \frac{\alpha + \operatorname{th}F}{1+\alpha\operatorname{th}F}. \tag{14}$$

Поскольку $1 \pm \beta = \dfrac{(1\pm\alpha)(1\pm\operatorname{th}F)}{1+\alpha\operatorname{th}F}$, то ненулевые собственные значения оператора $\dfrac{\operatorname{ch}F + \alpha\operatorname{sh}F}{\sqrt{1-\alpha^2}}S$ равны $\sqrt{\dfrac{1\pm\alpha}{1\mp\alpha}}(\operatorname{ch}F \pm \operatorname{sh}F)$. Оператор S имеет минимальное уравнение

$$S[S + 2ikp(1+\beta)][S + 2ikp(1-\beta)] = 0, \tag{15}$$

следовательно, он имеет собственные значения $\lambda_0 = 0$, $\lambda_\pm = -2ikp(1\pm\beta)$. Поскольку $\operatorname{Sp} S = -4ikp$, то нулевое собственное значение является двухкратным. Любой вектор χ_0 можно разложить по подпространствам, отвечающим λ_0, $\lambda_\pm$, т. е. представить в виде $\chi_0 = \chi^{(0)} + \chi^{(+)} + \chi^{(-)}$, при этом входящий в (13) вектор $S\chi_0$ равен $S\chi_0 = S\chi^{(+)} + S\chi^{(-)} = \lambda_+\chi^{(+)} + \lambda_-\chi^{(-)}$, т. е. мы получаем два линейно независимых решения $\chi^{(\pm)}$, которые, согласно (15), могут быть выражены в виде

$$\chi^{(\pm)} = S[S + 2ikp(1\mp\beta)]\,\xi_0, \tag{16}$$

где ξ_0 — произвольный постоянный вектор. Если учесть скалярный множитель в (13), то оператор

$$S_1 = \frac{\operatorname{ch}F + \alpha\operatorname{sh}F}{\sqrt{1-\alpha^2}}S \tag{17}$$

имеет ненулевые собственные значения $\lambda^\pm = -2ikpe^{\pm 2i\varkappa|a|f}$.

В работе ([2]) решение ([1]) для электрона при отсутствии взаимодействия Паули было получено в форме

$$\psi = \beta\chi_0\exp i\left[px - \frac{1}{2kp}\int(b^2+m^2)\,d\varphi\right], \quad \beta = (i\hat{b} - m)\,\hat{k}. \tag{18}$$

Оно непосредственно получается из (2), (16) при $\varkappa = 0$. Легко видеть, что $\beta^2 = 2ikp\beta$, следовательно, матрица $\beta_0 = \beta / (2ikp)$ является проективной ($\beta_0{}^2 = \beta_0$), причем след ее равен двум. Как известно, след проективного оператора равен размерности подпространства, на которое он проектирует. Таким образом, функция ψ (18) при произвольном постоянном χ_0 содержит два линейно-независимых решения, т. е. имеет место двухкратное вырождение по оператору β. Эти два состояния можно различать по собственным значениям ± 1 оператора

$$\sigma = i\gamma^5 \hat{e}, \qquad e_i = \varepsilon_{ilns} k_l p_n a_s, \qquad \sigma^2 = e^2 = 1, \tag{19}$$

который коммутирует с β. Таким образом, указанные состояния могут быть заданы формулой

$$\psi_{\pm} = \beta (1 \pm \sigma) \chi_0 \exp i \left[px - \frac{1}{2kp} \int (b^2 + m^2)\, d\varphi \right]; \tag{20}$$

они различаются видом постоянного вектора $(1 \pm \sigma)\chi_0$.

При аномальном магнитном моменте, согласно (16), имеем два решения, различие между которыми не сводится к различному выбору постоянного вектора. В этом случае можно сказать, что взаимодействие Паули снимает вырождение, имеющее место при его отсутствии.

Заметим, что при отсутствии поля ($a = 0$) выражение (2) принимает вид $\psi = (i\hat{p} - m)\hat{k}\chi_0 e^{ipx}$, следовательно, $\hat{ip} + m / \psi = 0$, т. е. ψ является волновой функцией свободного электрона, как и должно быть.

Институт физики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
15 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. М. Волков, ЖЭТФ, 7, 1286 (1937). [2] Ф. И. Федоров, ДАН, **174**, 334 (1967).