Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 5

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

Б. А. РОГОЗИН

ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА ДЛЯ ФУНКЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 8 XII 1972)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — совокупность независимых случайных величин, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, и для случайной величины ξ

$$Q(\xi, l) = \sup_{-\infty<x<\infty} P\{x \leqslant \xi \leqslant x + l\}.$$

Значительный прогресс в изучении поведения $Q(S_n, L)$ в последние годы был достигнут благодаря работам Эссеена ([1]) и Кестена ([2]). Кестену же принадлежит замечание, что оценка для $Q(S_n, L)$, предложенная в ([2]), является аналогом локальной предельной теоремы, а оценки, полученные ранее,— аналогами интегральной предельной теоремы.

Цель заметки дать наиболее общее неравенство интегрального типа, из которого бы следовали все ранее полученные оценки интегрального типа. Это прежде всего относится к оценкам функции концентрации, предложенным в ([1]), а также к оценке, предложенной в сноске к работе автора ([3]), оценке, которой не затронули предложенные в ([1]) и ([2]) уточнения неравенств для функций концентраций. Доказательство этого неравенства работы ([3]) было опубликовано в ([4]).

Доказательству теоремы, содержащей предлагаемую оценку функций концентраций, мы предпошлем следующее утверждение.

Лемма. *Существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что для $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с $P\{\xi_k = l_k'\} = P\{\xi_k = -l_k'\} = 1/2$ и $l_k' \geqslant l_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.*

$$Q(S_n, L) \leqslant 2\Phi\left(\frac{C_1 L}{\sqrt{s}}\right) - 1 + \frac{C_2 \sum\limits_{k=1}^{n} l_k^3}{(\sqrt{s})^3}, \tag{1}$$

где $s = \sum\limits_{k=1}^{n} l_k^2$ и $\Phi(x)$ — функция распределения нормального закона с параметрами $(0, 1)$.

Доказательство. Положим $J = \left\{k : l_k' \geqslant s^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} l_i^3 = l\right\}$ и рассмотрим отдельно два случая:

1) $|J| \geqslant ms^3 \Big/ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_i^3\right)^2$,

2) $|J| < ms^3 \Big/ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_i^3\right)^2$,

где m — число, заключенное в интервале $(0, 1)$ и удовлетворяющее соотношению $m^{1/3} + m - 1 = 0$, и $|J|$ — число элементов в J.

В первом случае $l_k' \geqslant l$ при $k \in J$ и поэтому, в силу леммы 2 работы ([4]),

$$Q\left(\sum_{k\in J} \xi_k, L\right) \leqslant 2\Phi\left(\frac{L}{2\sqrt{|J|}\,l}\right) - 1 + \frac{C_3}{\sqrt{|J|}},$$

откуда получаем в этом случае (1) с $C_1 = (2\sqrt{m})^{-1}$.

Во втором случае заметим, что

$$\sum_{k\in J} l_k^2 \leqslant |J|^{1/3}\left(\sum_{k\in J} l_k^3\right)^{2/3} \leqslant m^{1/3}s$$

и, следовательно, для $\bar{J} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus J$

$$\sum_{k\in\bar{J}} l_k'^2 \geqslant \sum_{k\in\bar{J}} l_k^2 \geqslant (1 - m^{1/3})s = ms.$$

В силу центральной предельной теоремы

$$\left|P\left\{\sum_{k\in\bar{J}} \xi_k \leqslant x\right\} - \Phi\left(\frac{x}{\sum\limits_{k\in\bar{J}} l_{k_i}'^2}\right)\right| \leqslant \frac{C_4 \sum l_k'^3}{\left(\sum\limits_{i\in\bar{J}} l_i'^2\right)^{3/2}} \leqslant \frac{C_4 l}{\sqrt{\sum\limits_{i\in\bar{J}} l_i'^2}}$$

отсюда снова получаем неравенство (1) с $C_1 = (2\sqrt{m})^{-1}$.

Соотношение (1) допускает следующую эквивалентную форму записи: для любых $l_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, в условиях леммы

$$Q(S_n, L) \leqslant 2\Phi\left(\frac{C_1 L}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (l_i' \wedge l_i)^2\right)^{1/2}}\right) - 1 + \frac{C_2 \sum\limits_{i=1}^{n} (l_i' \wedge l_i)^3}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_i' \wedge l_i)^2\right)^{3/2}}, \tag{2}$$

где $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

Перед формулировкой теоремы введем необходимые понятия и отметим некоторые их свойства. Для случайной величины ξ с функцией распределения $F(x)$ определим функцию квантилей порядка y, $0 < y < 1$, определяемую с помощью соотношения

$$F(u(y) - 0) \leqslant y \leqslant F(u(y) + 0). \tag{3}$$

Функция $u(y)$ этим соотношением определяется однозначно за исключением счетного числа значений y, $0 < y < 1$.

Предполагая в дальнейшем, что $u(y)$ непрерывна слева, мы определим $u(y)$ для всех значений $0 < y < 1$. Для $0 < y < 1/2$ введем функцию широты размаха $l(y)$ и центра $a(y)$ порядка y как

$$l(y) = 1/2(u(1-y) - u(y)), \quad a(y) = 1/2(u(1-y) + u(y)).$$

Относительно свойств введенных понятий сделаем следующие замечания.

1) Если η равномерно распределена на $[0, 1]$, то $P\{u(\eta) < x\} = F(x)$ и, не ограничивая общности рассмотрения, можно считать, что $\xi = u(\eta)$.

2) Если фиксировать $\eta \wedge (1-\eta)$, то при $\xi = u(\eta)$ условное распределение ξ при заданном $\eta \wedge (1-\eta)$ можно выбрать совпадающим с распределением, сосредоточенным в точках

$$a(\eta \wedge (1-\eta)) - l(\eta \wedge (1-\eta)), \quad a(\eta \wedge (1-\eta)) + l(\eta \wedge (1-\eta))$$

с вероятностями по $1/2$ в каждой точке.

3) $1/2|\xi - u(1/2)| \leqslant l(\eta \wedge (1-\eta))$.

4) При любом $\lambda > 0$, $p > 0$ и $C(p) = \max\{2^p, 2\}$

$$M\left(\frac{|\xi - u(1/2)|}{2} \wedge \lambda\right)^p \leqslant M(l(\eta \wedge (1-\eta)) \wedge \lambda)^p \leqslant C(p) M\left(\frac{|\xi - u(1/2)|}{2} \wedge \lambda\right)^p.$$

5) При $\lambda \geqslant 0$, $p \geqslant 1$

$$2^{-2p-1} M(|\bar{\xi}| \wedge 4\lambda)^p \leqslant M\left(\frac{|\xi - u(1/2)|}{2} \wedge \lambda\right)^p \leqslant 2^{-p+1} M(|\bar{\xi}| \wedge 2\lambda)^p,$$

где $\bar\xi = \xi - \xi'$ и случайная величина ξ' не зависит от ξ и одинаково с ней распределена.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — совокупность независимых случайных величин, $u_k(y)$, $l_k(y)$, $a_k(y)$ — соответственно функции квантилей, широты и центра порядка y для ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — совокупность независимых равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных величин, $\bar\xi_k = \xi_k - \xi_k'$, и ξ_k' не зависит от ξ_k и одинаково с ней распределена.

Теорема. *При любых* $\lambda_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$Q(S_n, L) \leqslant 2\Phi\left(\frac{C_6 L}{\sqrt{s_1}}\right) - 1 + \frac{C_7 \sum\limits_{k=1}^{n} M\,(l_k(\eta_k \wedge (1-\eta_k)) \wedge \lambda_k)^3}{(\sqrt{s_1})^3}, \tag{4}$$

$$s_1 = \sum_{k=1}^{n} M\,(l_k(\eta_k \wedge (1-\eta_k)) \wedge \lambda_k)^2. \tag{5}$$

Такие же неравенства имеют место при замене в (4) и (5) случайной величины $l_k(\eta_k \wedge (1-\eta_k)) \wedge \lambda_k$ *на случайные величины* ${}^1/{}_2(|\xi_k - u_k({}^1/{}_2)| \wedge \lambda_k)$ *или* $|\bar\xi_k| \wedge \lambda_k$.

Доказательство. Будем считать, не ограничивая общности, что $\xi_k = u(\eta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. При заданных $\eta_k \wedge (1-\eta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, совместное условное распределение ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, можно выбрать совпадающим с распределением независимых случайных величин ξ_k'', $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$P\{\xi_k'' = a_k(\eta_k \wedge (1-\eta_k)) \pm l_k(\eta_k \wedge (1-\eta_k))\} = {}^1/{}_2.$$

Применяя лемму (см. (2)) к случайной величине $S_n'' = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k''$, получаем

$$Q(S_n'', L) \leqslant 2\Phi\left(\frac{C_1 L}{\sqrt{s'}}\right) - 1 + \frac{C_2 \sum\limits_{k=1}^{n} (l_k(\eta_k \wedge (1-\eta_k)) \wedge \lambda_k)^3}{(\sqrt{s'})^3},$$

где $s' = \sum\limits_{k=1}^{n} (l_k(\eta_k \wedge (1-\eta_k)) \wedge \lambda_k)^2$. Заметим, что $Ms' = s_1$ и

$$M\,|s' - Ms'|^{3/2} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} M\,|(l_k(\eta_k \wedge (1-\eta_k)) \wedge \lambda_k)^2 -$$

$$- M\,(l_k(\eta_k \wedge (1-\eta_k)) \wedge \lambda_k)^2|^{3/2} \leqslant 2\sqrt{2} \sum_{k=1}^{n} M\,(l_k(\eta_k \wedge (1-\eta_k)) \wedge \lambda_k)^3 +$$

$$+ 2\sqrt{2} \sum_{k=1}^{n} (M\,(l_k(\eta_k \wedge (1-\eta_k)) \wedge \lambda_k)^2)^{3/2} \leqslant$$

$$\leqslant 4\sqrt{2} \sum_{k=1}^{n} M\,(l_k(\eta_k \wedge (1-\eta_k)) \wedge \lambda_k)^3.$$

При этом последовательно использованы: неравенство работы [6]

$$M\left|\sum_{k=1}^{n} \eta_k\right|^r \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} M\,|\eta_k|^r$$

при условии, что $M\eta_k = 0$ и η_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, независимы, $1 \leqslant r \leqslant 2$, и свойство, что $(M|\xi|^r)^{1/r}$ — монотонно неубывающая функция от r (см. [5], стр. 261).

Используя оценку для $M|s'-Ms'|^{3/2}$ в неравенстве Чебышева для s', получим

$$P\left\{|s'-Ms'|\geqslant\frac{Ms'}{2}\right\}\leqslant 16s_1^{-3/2}\sum_{k=1}^{n}M(l_k(\eta_k\wedge(1-\eta_k))\wedge\lambda_k)^3.$$

Таким образом, почти наверное

$$Q'(s_n, L)\leqslant 2\Phi\left(\frac{\sqrt{2}\,C_1L}{\sqrt{s_1}}\right)-1+\frac{2\sqrt{2}\,C_2\sum_{k=1}^{n}(l_k(\eta_k\wedge(1-\eta_k))\wedge\lambda_k)^3}{(\sqrt{s_1})^3}+$$

$$+\frac{16\sum_{k=1}^{n}M(l_k(\eta_k\wedge(1-\eta_k))\wedge\lambda_k)^3}{(\sqrt{s_1})^3},$$

где $Q'(S_n, L)$ — условная функция концентрации S_n при условии, что заданы значения $\eta_k\wedge(1-\eta_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$. Отсюда очевидным образом вытекает неравенство (4).

Из неравенства (4) с помощью неравенств замечаний 4) и 5) получаем остальные упоминавшиеся в теореме неравенства.

Отметим, что из (4) вытекает следующее неравенство:

$$Q(S_n, L)\leqslant 2\Phi\left(\frac{C_6L}{\sqrt{s_1}}\right)-1+\frac{C_7\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\lambda_k}{\sqrt{s_1}},$$

а также неравенства с заменой в выражении (5) для s_1 случайной величины $l_k(\eta_k\wedge(1-\eta_k))\wedge\lambda_k$ на $^1/_2(|\xi_k-u_k(^1/_2)|\wedge\lambda_k)$ или $|\xi_k|\wedge\lambda_k$.

Постоянные C_i в этих соотношениях могут быть уменьшены, если воспользоваться леммой 1 из [4] и методом доказательства теоремы с заменой неравенства Чебышева с $M|s'-Ms'|^{3/2}$ неравенством Чебышева с Ds'. Метод доказательства теоремы представляет развитие метода доказательства теоремы работы [3] тесно связанным с работой [7].

Институт математики
Сибирского отделения
Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
20 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. J. Esseen, Zs. Wahrscheinlichkeitstheorie, 9, 290 (1968). [2] H. Kesten, Math. Scandinavia, 25, 133 (1969). [3] Б. А. Рогозин, Теория вероятн. и ее применен., 6, 106 (1961). [4] B. A. Rogozin, Lecture Notes in Mathem., 1973. 2 Japan — USSR Symposium on Probability Theory, Kyoto, 1972. [5] M. Лоэв, Теория вероятностей, M., 1962. [6] B. von Bahr, C. J. Esseen, Ann. Math. Stat., 36, 299 (1965). [7] A. Kolmogorov, Ann. Inst. H. Poincare, 16, 27 (1958).