Проблемы физики, математики и техники, № 4 (13), 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 512.54

О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ, ЗАДАННЫХ НА *n*-АРНОЙ ГРУППЕ

Ю.В. Кравченко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON PARALLEL STRAIGHT LINES DESIGNATED ON AN *n*-ARY GROUP

Yu.V. Kravchenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Предлагается другой подход к понятию параллелограмма, заданного на *n*-арной группе. Традиционно параллелограмм, заданный на *n*-арной группе, – это четыре точки, удовлетворяющие определённому тождеству. Здесь же параллелограмм – это две пары параллельных прямых. Доказывается, что эти два подхода эквивалентны.

Ключевые слова: *n-арная группа, обратная последовательность, нейтральная последовательность, параллельные прямые, параллелограмм.*

In the paper the other approach to the notion of the parallelogram on the *n*-ary group is presented. Traditionally a parallelogram on an *n*-ary group is considered as four points satisfying the determined identity. Here the parallelogram is considered as two pairs of parallel straight lines. These two approaches are proved to be equivalent.

Keywords: *n-ary group, inverse sequence, neutral sequence, parallel straight line, parallelogram.*

Введение

Изучение алгебраических систем, основы которых заложены в работах А.И. Мальцева [1] и А.Г. Куроша [2], двигалось различными путями, связанными с особенностями изучаемых объектов. Например, исследование групп (бинарных) больше было связано с их подгрупповым строением и применением факторизационных методов (см. [3], [4]). Наиболее удачным и универсальным, как показало время, оказалось применение методов теории классов алгебраических систем.

Среди них следует выделить формационные методы изучения алгебраических систем, получившие наибольшее развитие в Гомельской алгебраической школе, у истоков которой стоит член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор Л.А. Шеметков. Применение этих методов при изучении групп (см. [5]) показало их универсальный характер, что позволило использовать их при исследовании более общих алгебраических систем, например таких, как мультикольца [6]. Более того, они дали толчок в развитии теории подгрупповых функторов [7].

Появление такой ветви теории алгебраических систем, как теория *n*-арных групп, берёт своё начало с работы Дернте [8]. Дальнейшее изучение *n*-арных групп связано с работами Поста [9] и С.А. Чунихина [10]. С выходом в свет монографии С.А. Русакова [11] происходит формирование теории *n*-арных групп в отдельную область алгебры. Следует отметить ряд интересных работ (см. [12, 13]), связанных с изучением подгруппового строения и получения классических факторизаций для *n*-арных групп. Применение же формационных методов в теории *n*-арных групп несколько ограничено следующими двумя аспектами. В *n*-арной группе могут существовать различные инвариантные подгруппы, пересечение которых пусто, а факторгруппы по которым совпадают. Кроме того, убывающий инвариантный ряд подгрупп не всегда может заканчиваться одноэлементной подгруппой. Поэтому, несмотря на отдельные работы в этом направлении [14], [15], такого же развития, как и для бинарных групп, формационные методы не получили.

Применению геометрических методов при изучении алгебраических систем, в частности, *n*-арных групп, и наоборот посвящена основная часть монографии С.А. Русакова [16]. Исследования, относящиеся к этому направлению, ведутся по формуле А.Ю. Ольшанского [17] «алгебра – геометрия – алгебра». Ряд интересных результатов в этом направлении получен в работах [18], [19].

Развитию этого направления в изучении *n*-арных групп посвящена данная работа.

1 Используемые понятия и результаты

Используются обозначения, принятые в [6], [11]. Основные определения и понятия можно найти в [11], [16].

Напомним некоторые наиболее часто встречающиеся.

Операцию, заданную на *n*-арной группе *G*, будем обозначать ω_n. Последовательность элементов $a_1, a_2, ..., a_i$ (или a_1^i) *n*-арной группы *G* называется обратной к последовательности элементов b_1^j *n*-арной группы *G*, если последовательность a_1^i,

b_1^j является нейтральной последовательностью в G, то есть для любого элемента $x \in G$ выполняется равенство $(x, a_1^i, b_1^j)\omega_n = x$. Для краткости записи, если нас не интересует структура обратной последовательности, будем писать $a_1^i = (b_1^j)^{-1}$. Четырёхугольник $\langle a, b, c, d\rangle$ n-арной группы G называется параллелограммом, если $(a, b^{-1}, c)\omega_n = d$.

***Лемма* 1.1** [16, предложение 2, С. 58]. *Если четырёхугольник $\langle a, b, c, d\rangle$ n-арной группы G является параллелограммом, параллелограммами являются и $\langle b, a, d, c\rangle$, $\langle c, d, a, b\rangle$, $\langle d, c, b, a\rangle$.*

2 Параллельность прямых

Пусть G – произвольная n-арная группа. Элементы группы G будем называть также точками. Пусть a и b – произвольные точки n-арной группы G.

***Определение* 2.1.** *Под прямой $l(a, b)$ на n-арной группе G, образованной двумя точками a и b, будем понимать такое подмножество множества G, для каждой точки которого выполняется одно из следующих условий:*

1. *Существуют точки $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in l(a, b)$, что для любой точки $y \in l(a, b)$ $(y, x_1^{n-1})\omega_n \in l(a, b)$ либо $(x_1^{n-1}, y)\omega_n \in l(a, b)$.*

2. *Существуют точки $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in l(a, b)$, что для любой точки $y \in l(a, b)$ $(x_1^{i-1}, y, x_i^{n-1})\omega_n \in l(a, b)$ для любых $i \in [1, n\text{-}1]$.*

***Замечание* 2.1.** В силу эквивалентности (см. теорема 1.9 [12]) определений n-арной группы, введённых Постом в [9], эквивалентны и условия 1) и 2) в определении 2.1.

***Замечание* 2.2.** Очевидно, что прямые $l(a, b)$ и $l(b, a)$ совпадают.

***Замечание* 2.3.** Не трудно заметить, что каждая прямая на n-арной группе однозначно определяется любыми двумя своими точками.

***Определение* 2.2.** *Две прямые $l(a, b)$ и $l(c, d)$, заданные на n-арной группе G, называются параллельными:*

1) *если $l(a, b)$ и $l(c, d)$ совпадают;*

2) *если $l(a, b) \neq l(c, d)$, то*

а) существует последовательность x_1^{n-1} точек n-арной группы G такая, что для любой точки $g \in l(a, b)$ $(x_1^{i-1}, g, x_i^{n-1})\omega_n \in l(c, d)$, $i \in [1, n-1]$;

б) существует последовательность y_1^{n-1} точек n-арной группы G такая, что для любой точки $h \in l(c, d)$ $(y_1^{i-1}, h, y_i^{n-1})\omega_n \in l(a, b)$, $i \in [1, n-1]$.

***Замечание* 2.4.** Условие $l(a, b) = l(c, d)$ равносильно тому, что точки a, b, c, d лежат на одной прямой.

***Замечание* 2.5.** В силу эквивалентности (см. теорема 1.9 [12]) определений n-арной группы, введённых Постом в [9], условия а) и б) в определении 2.2 можно перифразировать следующим образом:

а') существует последовательность x_1^{n-1} точек n-арной группы G такая, что для любой точки $g \in l(a, b)$ $(g, x_1^{n-1})\omega_n \in l(c, d)$;

б') существует последовательность y_1^{n-1} точек n-арной группы G такая, что для любой точки $h \in l(c, d)$ $(h, y_1^{n-1})\omega_n \in l(a, b)$.

***Замечание* 2.6.** Так как каждая прямая на n-арной группе однозначно определяется своими двумя любыми точками, то условия а) и б) в определении 2.2 можно перифразировать следующим образом:

а'') на прямой $l(a, b)$ найдутся две таких точки f и g, для которых существует последовательность x_1^{n-1} точек n-арной группы G такая, что $(f, x_1^{n-1})\omega_n \in l(c, d)$ и $(g, x_1^{n-1})\omega_n \in l(c, d)$;

б'') на прямой $l(c, d)$ найдутся две таких точки p и q, для которых существует последовательность y_1^{n-1} точек n-арной группы G такая, что $(p, y_1^{n-1})\omega_n \in l(a, b)$ и $(q, y_1^{n-1})\omega_n \in l(a, b)$.

***Замечание* 2.7.** В силу произвольности выбора точек, определяющих каждую прямую, не ограничивая общности рассуждений, условия *а*) и *б*) в определении 2.2 можно перифразировать следующим образом:

а''') существует последовательность x_1^{n-1} точек n-арной группы G такая, что $(a, x_1^{n-1})\omega_n = c$ и $(b, x_1^{n-1})\omega_n = d$;

б''') существует последовательность y_1^{n-1} точек n-арной группы G такая, что $(c, y_1^{n-1})\omega_n = a$ и $(d, y_1^{n-1})\omega_n = b$.

Несложная проверка показывает, что справедлива следующая

***Лемма* 2.1.** *Бинарное отношение «быть параллельной» является отношением эквивалентности на G.*

Согласно замечанию 2.7, если $l(a, b) \parallel l(c, d)$, то существует последовательность x_1^{n-1} точек n-арной группы G такая, что $(a, x_1^{n-1})\omega_n = c$. Но $l(c, d) \parallel l(a, b)$, следовательно, существует последовательность y_1^{n-1} точек n-арной группы G такая, что $(c, y_1^{n-1})\omega_n = a$. Тогда

$$a = (c, y_1^{n-1})\omega_n = (a, x_1^{n-1}, y_1^{n-1})\omega_n.$$

Это означает, что x_1^{n-1}, y_1^{n-1} – нейтральная в G последовательность, то есть $x_1^{n-1} = (y_1^{n-1})^{-1}$.

С учётом этих рассуждений и замечаний 2.1–2.7 можно дать определение параллельности прямых на G в следующем виде.

***Определение* 2.3.** *Две прямые $l(a, b)$ и $l(c, d)$, заданные на n-арной группе G, называются параллельными:*

1) *если* $l(a, b)$ *и* $l(c, d)$ *совпадают*;

2) *если* $l(a, b) \neq l(c, d)$, *то существует последовательность* x_1^{n-1} *точек n-арной группы G такая, что* $(a, x_1^{n-1})\omega_n = c$.

***Замечания* 2.8.** Очевидно, что для любой прямой, заданной на n-арной группе G, всегда найдется параллельная ей прямая, однозначно определяемая некоторой последовательностью элементов n-арной группы G, переводящей произвольный элемент первой прямой в элемент второй прямой.

***Определение* 2.4.** *Две прямые, заданные на n-арной группе, называются пересекающимися, если они имеют только одну общую точку.*

***Лемма* 2.2.** *Если две прямые, заданные на n-арной группе, параллельны и имеют одну общую точку, то они совпадают.*

Доказательство тривиально, если взять в качестве искомой последовательности в определении 2.3 нейтральную последовательность.

***Теорема* 2.1.** *Пусть a и b – произвольные точки n-арной группы G. Тогда* $l(a, b)$ *– подгруппа группы G.*

Доказательство. Так как операция ассоциативна на G, то, очевидно, она будет ассоциативна и на $l(a, b)$, то есть $l(a, b)$ – полугруппа n-арной группы G.

Пусть x – произвольный элемент n-арной группы G. Рассмотрим уравнение

$$(x, a_1^{n-1})\omega_n = a, \qquad (2.1)$$

где $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a \in l(a, b)$.

Рассмотрим прямую $l(x, a)$. Покажем, что $l(x, a) \parallel l(a, b)$. Рассмотрим последовательность a_1^{n-1} точек прямой $l(x, a)$. Согласно определению 2.1 $(x, a_1^{n-1})\omega_n = y \in l(x, a)$. Тогда на $l(a, x)$ существует последовательность x_1^{n-1}, $(y, x_1^{n-1})\omega_n = a$. Так как последовательность a_1^{n-1}, x_1^{n-1} состоит из точек прямой $l(x, a)$, то

$$(x, a_1^{n-1}, x_1^{n-1})\omega_n = (y, x_1^{n-1})\omega_n = a.$$

Так как a и $b \in l(a, b)$, то существует последовательность точек $b_1^{n-1} \in l(a, b)$ такая, что $(a, b_1^{n-1})\omega_n = b$. Значит,

$$(x, a_1^{n-1}, x_1^{n-1}, b_1^{n-1})\omega_n = (y, x_1^{n-1}, b_1^{n-1})\omega_n = $$
$$= (a, b_1^{n-1})\omega_n = b.$$

Итак, существует последовательность точек $a_1^{n-1}, x_1^{n-1}, b_1^{n-1}$, переводящая точку $x \in l(x, a)$ в точку $b \in l(a, b)$.

Согласно определению 2.3, $l(x, a) \parallel l(a, b)$. А так как $l(x, a) \cap l(a, b) = \{a\}$, то, согласно лемме 2.1, $l(x, a) = l(a, b)$. А это и означает, что $x \in l(a, b)$. То есть уравнение (2.1) разрешимо в $l(a, b)$. Теорема доказана.

***Лемма* 2.3.** *Пусть a, b, c – точки n-арной группы G,* $c \notin l(a, b)$. *На n-арной группе G существует одна и только одна прямая, параллельная* $l(a, b)$ *и проходящая через точку c.*

Доказательство. Рассмотрим прямую $l(a, b)$. Согласно определению 2.1, существует последовательность a_1^{n-1} точек прямой $l(a, b)$ такая, что $(a, a_1^{n-1})\omega_n = b$. Пусть $x = (c, a_1^{n-1})\omega_n$. Так как c и $x \in l(c, x)$, то существует последовательность точек $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in l(c, x)$, что выполняется $c = (x, x_1^{n-1})\omega_n$. Заметим, что

$$c = (x, x_1^{n-1})\omega_n = (c, a_1^{n-1}, x_1^{n-1})\omega_n,$$

то есть последовательность a_1^{n-1}, x_1^{n-1} является нейтральной. Значит, $x_1^{n-1} = (a_1^{n-1})^{-1}$. Тогда

$$(b, x_1^{n-1})\omega_n = (b, (a_1^{n-1})^{-1})\omega_n =$$
$$= (a, a_1^{n-1}, (a_1^{n-1})^{-1})\omega_n = a.$$

Учитывая, что $l(a, b) = l(b, a)$, получаем $l(a, b) \parallel l(c, x)$.

Докажем, что $l(c, x)$ – единственная прямая, параллельная $l(a, b)$ и проходящая через точку c. От противного. Пусть существует две прямых $l(c, x)$ и $l(c, y)$ таких, что $l(c, x) \parallel l(a, b)$ и $l(c, y) \parallel l(a, b)$, $l(c, x) \neq l(c, y)$. Последнее означает, что $y \notin l(c, x)$, то есть прямые $l(c, x)$ и $l(c, y)$ не имеют общих точек, кроме c.

Так как $l(c, y) \parallel l(a, b)$, то для точки $y \in l(c, y)$ существует последовательность точек x_1^{n-1} таких, что

$$(y, x_1^{n-1})\omega_n = b. \qquad (2.2)$$

Так как $l(c, x) \parallel l(a, b)$, то $l(a, b) \parallel l(c, x)$. Значит, для точки $b \in l(a, b)$ существует последовательность точек y_1^{n-1} таких, что

$$(b, y_1^{n-1})\omega_n = x. \qquad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) следует, что $(y, x_1^{n-1}, y_1^{n-1})\omega_n = x$, где x_1^{n-1}, y_1^{n-1} – некоторая последовательность точек из G. Согласно определению 2.3, $l(c, y) \parallel l(c, x)$. А с учётом леммы 2.2 $l(c, y) = l(c, x)$. Противоречие с предположением. Лемма доказана.

***Лемма* 2.4.** *Любые две несовпадающие прямые на n-арной группе G либо параллельны, либо пересекаются.*

Доказательство. Пусть $l(a, b)$ и $l(c, d)$ – две прямые, заданные на n-арной группе G. Если они параллельны, то теорема тривиальна.

Пусть $l(a, b)$ и $l(c, d)$ не параллельны. Очевидно, если они имеют две или более общих точек, то они совпадают, что невозможно по условию. Остаются две возможности:

$$l(a, b) \cap l(c, d) = \{g\} \text{ или } l(a, b) \cap l(c, d) = \varnothing.$$

От противного. Пусть $l(a, b) \cap l(c, d) = \varnothing$.

Итак, $l(a, b)$ и $l(c, d)$ не параллельны,

$$l(a, b) \neq l(c, d),$$
$$l(a, b) \cap l(c, d) = \varnothing.$$

Так как $l(a, b)$ и $l(c, d)$ не параллельны, то в G не найдётся такой последовательности элементов

x_1^{n-1}, что $(a, x_1^{n-1})\omega_n = c$. Другими словами, для любой последовательности $y_1^{n-1} \in G$

$$(a, y_1^{n-1})\omega_n \neq c. \quad (2.4)$$

Рассмотрим последовательность a^{-1}, c, где a^{-1} – последовательность, обратная к элементу a. Подставим её в (2.4). Получим $(a, a^{-1}, c)\omega_n \neq c$ или $c \neq c$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 2.2. *Четыре точки a, b, c, d n-арной группы G образуют параллелограмм тогда и только тогда, когда* $l(a, b) \,||\, l(c, d)$ *и* $l(a, c) \,||\, l(b, d)$.

Доказательство. Пусть

$$l(a, b) \,||\, l(c, d) \quad (2.5)$$

и

$$l(b, c) \,||\, l(d, a). \quad (2.6)$$

Из (2.5) следует, что существует последовательность точек x_1^{n-1}, что $(a, x_1^{n-1})\omega_n = d$ и $(b, x_1^{n-1})\omega_n = c$.

Из (2.6) следует, что существует последовательность точек y_1^{n-1}, что $(b, y_1^{n-1})\omega_n = a$ и $(c, y_1^{n-1})\omega_n = d$.

Очевидно, что в n-арной группе G существует последовательность элементов, обратная для последовательности y_1^{n-1}. Обозначим её через $(y_1^{n-1})^{-1}$. Тогда

$$b = (a, (y_1^{n-1})^{-1})\omega_n.$$

Рассмотрим прямую $l(b', c')$ такую, что

$$(b, (y_1^{n-1})^{-1})\omega_n = b', \ (c, (y_1^{n-1})^{-1})\omega_n = c',$$
$$(b', x_1^{n-1})\omega_n = c'.$$

Очевидно, что $l(b', c') \,||\, l(b, c)$. Заметим также, что $(c', y_1^{n-1})\omega_n = c$.

Тогда

$$\begin{aligned} d &= (c, y_1^{n-1})\omega_n = (b, x_1^{n-1}, y_1^{n-1})\omega_n = \\ &= (a, (y_1^{n-1})^{-1}, x_1^{n-1}, y_1^{n-1})\omega_n = \\ &= (a, b^{-1}, b, (y_1^{n-1})^{-1}, x_1^{n-1}, y_1^{n-1})\omega_n = \\ &= (a, b^{-1}, b', x_1^{n-1}, y_1^{n-1})\omega_n = \\ &= (a, b^{-1}, c', y_1^{n-1})\omega_n = (a, b^{-1}, c)\omega_n. \end{aligned}$$

Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть четырёхугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ является параллелограммом, то есть

$$(a, b^{-1}, c)\omega_n = d, \quad (2.7)$$

где $a \in l(a, b)$, $d \in l(c, d)$. Значит, существует последовательность b^{-1}, c точек n-арной группы G, что выполняется (2.7). Согласно определению 2.3, $l(a, b) \,||\, l(c, d)$.

Если учесть лемму 1.1 и провести рассуждения для параллелограмма $\langle d, c, b, a \rangle$ аналогично, то получим $l(a, c) \,||\, l(b, d)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев, А.И.* Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – М. : Наука, 1970. – 392 с.
2. *Курош, А.Г.* Лекции по общей алгебре / А.Г. Курош. – М. : Наука, 1973. – 399 с.
3. *Холл, М.* Теория групп / М. Холл.– М. : ИЛ, 1962. – 468 с.
4. *Чунихин, С.А.* Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск : Наука и техника, 1964. – 158 с.
5. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.
6. *Шеметков, Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 256 с.
7. *Подгрупповые функторы в теории классов конечных групп* / С.Ф. Каморников [и др.]. – Гомель, 2001. – 237 с. – (Препринт / Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины).
8. *Dornte, W.* Untersuchunden uber einen verall / W. Dornte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 119.
9. *Post, E.L.* Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc / E.L. Post. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–305.
10. *Чунихин, С.А.* К теории неассоциативных *n*-групп с постулатом K // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 48, № 1. – С. 7–10.
11. *Русаков, С.А.* Алгебраические *n*-арные системы: Силовская теория *n*-арных групп / С.А. Русаков. – Минск. : Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.
12. *Гальмак, А.М.* Теоремы Поста и Глускина-Хоссу / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 1997. – 82 с.
13. *Гальмак, А.М.* Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск. : Беларуская навука, 1999. – 182 с.
14. *Каморников, С.Ф.* Функторы Гашюца / С.Ф. Каморников, Ю.В. Кравченко // Вопросы алгебры. – Гомель, 1999. – Вып. 15. – С. 37–40.
15. *Кравченко, Ю.В.* Регулярные фильтрующие подгрупповые функторы / Ю.В. Кравченко. – Гомель, 2002. – 10 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 12).
16. *Русаков, С.А.* Некоторые приложения теории *n*-арных групп / С.А. Русаков. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 182 с.
17. *Ольшанский, А.Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах / А.Ю. Ольшанский. – М. : Наука, 1989. – 448 с.
18. *Кулаженко, Ю.И.* Геометрия параллелограммов / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры и прикладной математики : Сб. науч. тр. / Ред. С.А. Русаков. – Гомель, 1995. – С. 47–64.
19. *Кулаженко, Ю.И.* Симметрия, шестиугольники и полуабелевость *n*-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2008. – № 2 (47). – С. 99–106.

Поступила в редакцию 19.06.12.