

А. А. РЯБИНИН

# ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ СВЕРТКИ НА ОСИ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 7 XII 1972)

Пусть  $C$  — пространство функций, определенных и непрерывных на всей действительной оси, с топологией равномерной сходимости на компактах,  $C^*$  — сопряженное пространство. Если  $s \in C^*$ , то существует отрезок  $[a, b]$

и на нем функция ограниченной вариации  $\sigma(t)$  такие, что  $s(f) = \int_a^b f(t) d\sigma(t)$

для  $\forall f \in C$ . В работах Дельсарта, Л. Шварца, Кахана, Леонтьева и др. (см. по этому поводу <sup>(1)</sup>) изучались функции  $f \in C$  и удовлетворяющие однородному уравнению свертки

$$s * f \equiv \int_a^b f(x+t) d\sigma(t) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (1)$$

Решения уравнения (1) называют периодическими в среднем функциями. К числу основных фактов в теории функций, периодических в среднем, относятся теорема единственности, утверждающая, что периодическая в среднем функция определяется своими значениями на произвольном отрезке длины  $b-a$ , и теорема аппроксимации периодической в среднем функции посредством линейных комбинаций функций  $e^{i\mu_v x}$ ,  $xe^{i\mu_v x}$ , ...

...,  $x^{n_v-1}e^{i\mu_v x}$  ( $\mu_v$  — нули функции  $L(\mu) = \int_a^b e^{i\mu t} d\sigma(t)$  кратности  $n_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$ ) в топологии  $C$ .

В этой работе устанавливаются аналогичные утверждения для периодических в среднем функций из пространств Бесова  $B_{1,1}^r$  (<sup>(3)</sup>; см. также <sup>(4)</sup>).

По определению, функция  $f$  принадлежит к классу  $B_{1,1}^r[a, b]$ ,  $0 < r < 1$ , если  $f \in L_1[a, b]$  и конечна величина

$$N_{1,r} = \int_0^{b-a} h^{-(1+r)} \omega_1(f; h) dh,$$

где

$$\omega_1(f; h) = \sup_{0 < t \leq h} \int_a^{b-t} |f(x+t) - f(x)| dx.$$

Класс  $B_{1,1}^r[a, b]$  является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{B_{1,1}^r[a,b]} = \|f\|_{L_1} + N_{1,r}(f).$$

В этом пространстве линейный непрерывный функционал имеет, как показано в работе <sup>(5)</sup>, вид  $s(f) = \int_a^b f(t) dg_s(t)$ , где  $g_s(t)$  принадлежит гёльдеровскому классу  $\Lambda_{1-r}[a, b]$  с показателем  $1-r$ , причем интеграл понимается в смысле, более слабом, чем интеграл Римана — Стильтьеса.

Через  $B_{1, \text{loc}}^r$  обозначим пространство функций, определенных на всей действительной оси и на каждом конечном отрезке  $[a, b]$ , принадлежащих  $B_{1,1}^r[a, b]$ . Топология в  $B_{1, \text{loc}}^r$  определяется набором полунорм  $\{\|f\|_{B_{1,1}^r[a, b]}, -\infty < a < b < \infty\}$ . Если  $s$  — непрерывный линейный функционал на  $B_{1, \text{loc}}^r$  то найдется отрезок  $[a, b]$  и функция  $g(t) \in \Lambda_{1-r}[a, b]$  такие, что  $s(f) = \int_a^b f(t) dg(t)$  для  $\forall f \in B_{1, \text{loc}}^r$ .

Нашей задачей является изучение решений уравнения свертки

$$s * f \equiv \int_a^b f(x+t) dg(t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

где  $f \in B_{1, \text{loc}}^r$ ,  $g \in \Lambda_{1-r}[a, b]$ . Без ограничения общности можно считать, что отрезок  $[a, b]$  симметричен относительно точки  $t=0$ , т. е.  $a = -q$ ,  $b = q$ ,  $q > 0$ .

Следуя (1), введем функцию

$$L(\mu) = \int_{-q}^q e^{i\mu t} dg(t)$$

назовем характеристической функцией уравнения (2), а функцию

$$\omega_L(\mu, \alpha, f) = i e^{-i\alpha\mu} \int_{-q}^q \left[ \int_0^t f(\alpha + t - u) e^{i\mu u} du \right] dg(t)$$

— интерполирующей функцией, здесь  $f \in B_{1, \text{loc}}^r$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$ ,  $\mu$  — любое комплексное число.

**Лемма 1.** Пусть функция  $g(t)$  не имеет интервалов постоянства, принадлежащих к точкам  $-q, q$ .

Тогда: 1) функции  $L(\mu)$  и  $\omega_L(\mu, \alpha, f)$ , как функции  $\mu$ , являются целыми функциями экспоненциального типа; 2) для почти всех  $\theta$  из  $(0, 2\pi)$  существует предел  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \ln |L(re^{i\theta})| = q |\sin \theta|$ ; 3) для действительных  $\mu$  верно  $|L(\mu)| \leq C |\mu|^r$ ; 4) для любого  $\mu$  справедливо  $|\omega_L(\mu, 0, f)| \leq C |\mu|_{re^{q|\operatorname{Im} \mu|}}$ .

Введем функцию

$$\frac{\omega_L(\mu, \alpha, f)}{L(\mu)} e^{i\mu x} \quad (3)$$

как функцию переменного  $\mu$ . На основании леммы 1 отметим следующие ее фундаментальные свойства.

**Свойство 1.** Пусть  $\beta$  — нуль функции  $L(\mu)$  кратности  $t$  и пусть  $\psi(x) = x^p e^{i\beta x}$ , где  $0 \leq p < t$ . Тогда вычет функции (3) равен нулю во всех нулях  $L(\mu)$ , отличных от  $\beta$  и равен  $\psi(x)$  в точке  $\mu = \beta$ .

**Свойство 2.** Пусть  $f \in B_{1, \text{loc}}^r$  и удовлетворяет уравнению (2). Тогда вычеты функции (3) не зависят от  $\alpha$ , лежащих на действительной оси.

**Свойство 3.** Пусть  $f \in B_{1, \text{loc}}^r$  и удовлетворяет уравнению (2). Если функция (3) не имеет особенностей, то  $f(x) = 0$  почти всюду на действительной оси.

Из свойств 2 и 3 вытекает

**Теорема 1 (единственности).** Пусть  $f \in B_{1, \text{loc}}^r$  и удовлетворяет уравнению (2). Если  $f(x) = 0$  почти всюду на  $[-q, q]$ , то  $f(x) = 0$  почти всюду на оси.

Доказательство теоремы аппроксимации встретило трудности, связанные с тем, что свертка  $s * f$ , где  $s \in (B_{1, \text{loc}}^r)^*$ ,  $f \in B_{1, \text{loc}}^r$  принадлежит  $C$ , однако использование метода, примененного в (2) в другой ситуации, позволило эти трудности обойти. Имеют место следующие утверждения.

Лемма 2. Пусть  $\beta$  — нуль  $L(\mu)$  и  $L_1(\mu) = \frac{L(\mu)}{\mu - \beta}$ . Тогда

$$L_1(\mu) = \int_{-q}^q e^{i\mu t} v(t) dt,$$

где  $v(t)$  непрерывна на  $[-q, q]$ .

Теорема 2. Пусть  $f(x)$  — решение уравнения (2). Тогда функция

$$\psi(x) = f(x) - P_\beta(x) e^{i\beta x}, \quad P_\beta(x) e^{i\beta x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\beta} \frac{\omega_L(\mu, a, f)}{L(\mu)} e^{i\mu x} d\mu$$

( $C_\beta$  — окружность с центром в точке  $\beta$ , внутри которой нет нулей функции  $L(\mu)$ , отличных от  $\mu = \beta$ ) есть решение уравнения

$$s_1 * \psi \equiv \int_{-q}^q \psi(x+t) v(t) dt = 0 \quad (4)$$

с характеристической функцией  $L_1(\mu)$ .

Теорема 2 позволила вопрос о решении уравнения (2) свести к вопросу о решении уравнения (4). Оператор свертки, порождаемый функционалом

$$s_1(f) = \int_{-q}^q f(t) v(t) dt, \text{ является уже непрерывным линейным оператором}$$

из  $B_{1, \text{loc}}^r \subset B_{1, \text{loc}}^r$ .

Теорема 3 (аппроксимации). Пусть  $f \in B_{1, \text{loc}}^r$  и удовлетворяет уравнению (4). Тогда функцию  $f(x)$  можно аппроксимировать в топологии  $B_{1, \text{loc}}^r$  посредством конечных линейных комбинаций функций системы

$$e^{i\mu_\nu x}, x e^{i\mu_\nu x}, \dots, x^{n_\nu-1} e^{i\mu_\nu x}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где  $\mu_\nu$  — всевозможные нули функции  $L_1(\mu)$ , а  $n_\nu$  — кратности.

Доказательство. Аппроксимация будет иметь место, если любой функционал  $\varphi \in (B_{1, \text{loc}}^r)^*$  и обращающийся в нуль на функциях системы (5), обращается в нуль на любом решении уравнения (4). Пусть

$$\varphi(f) = \int_a^b f(t) dg_\varphi(t), \quad L_\varphi(\mu) = \int_a^b e^{i\mu t} dg_\varphi(t), \quad f_1(x) = (\varphi * f)(x).$$

Оказывается,  $f_1(x)$  является решением (4) для любой функции  $f(x)$ , являющейся решением (4), и верно равенство

$$\frac{\omega_L(\mu, 0, f_1)}{L(\mu)} = \omega_L(\mu, 0, f) \frac{L_\varphi(\mu)}{L(\mu)} - \omega_{L_\varphi}(\mu, 0, f).$$

Поскольку  $\frac{L_\varphi(\mu)}{L(\mu)}$  — целая, то, используя свойство 3 функции (3), выводим, что  $f_1(x) = 0$  почти всюду. Но  $f_0(x)$  — непрерывная функция, поэтому

$$f_1(0) = \int_a^b f(t) dg_\varphi(t) = 0.$$

Теорема установлена.

Автор благодарит чл.-корр. АН СССР А. Ф. Леонтьева за внимание к работе.

Математический институт им. В. А. Стеклова  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
27 XI 1972

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. Ф. Леонтьев, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, № 2 (1965). <sup>2</sup> А. Ф. Леонтьев, Матем. сборн., 67, № 4 (1965). <sup>3</sup> О. В. Бесов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, № 60 (1961). С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969. <sup>4</sup> В. И. Мадяев, М. З. Соломяк, Матем. сборн., 88, № 4 (8) (1972).