Доклады Академии наук СССР

1973. Том 211, № 4

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

З. И. БЕЖАЕВА

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УСЛОВНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 XI 1972)

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, B, P) задана однородная двумерная цепь Маркова $\zeta_t(\omega) = (\xi_t(\omega), \eta_t(\omega))$, $t = 1, 2, \ldots$, с конечным числом возможных значений и переходной матрицей P. Пусть $\xi_t(\omega)$ принимает значения из $X = (x_1, \ldots, x_M)$, а $\eta_t(\omega)$ принимает значения из $Y = (y_1, \ldots, y_L)$. Через $\eta_{u,v}$ будем обозначать в дальнейшем траекторию $\eta_u(\omega), \ldots, \eta_v(\omega)$.

Через $(\xi_t, P\{\cdot\,|\,\eta_{1,n}\})$ будем обозначать марковскую цепь, которую при почти всех $\eta_{1,n}$ образует семейство случайных величин ξ_t, $t = 1, \ldots, n$, относительно условного распределения $P\{\cdot\,|\,\eta_{1,n}\}$, так называемую условную цепь Маркова.

Нас будут интересовать свойства траекторий цепей $(\xi_t, P\{\cdot\,|\,\eta_{1,n}\})$ и связанные с ними эргодические свойства семейства $(\xi_t, P\{\cdot\,|\,\eta_{1,n}\})$ при почти всех $\eta_{1,n}$.

1. В этой части мы рассматриваем цепи $\zeta_t(\omega)$, все состояния которых существенные и образуют один эргодический класс. Кроме того, переходная матрица P обладает тем свойством, что для любых $x \in X$, $y, y' \in Y$

$$P\{\eta_t = y\,|\,\eta_{t-1} = y', \xi_{t-1} = x\} = P\{\eta_t = y\,|\,\eta_{t-1} = y'\}. \tag{1}$$

При выполнении (1) процесс $\eta_t(\omega)$ сам является цепью Маркова.

Нетрудно также видеть, что если выполнено (1), то при почти всех $\eta_{1,n}$ цепь $(\xi_t, P\{\cdot\,|\,\eta_{1,n}\})$ в момент времени t управляется матрицей, зависящей лишь от значений $\eta_{t,t+1}$. Будем обозначать эту матрицу через $Q(\eta_{t,t+1})$. Матрица перехода за m шагов для цепи $(\xi_t, P\{\cdot\,|\,\eta_{1,n}\})$, начиная с момента времени t, зависит лишь от значений $\eta_{t,t+m}$ и равна

$$Q(\eta_{t,t+m}) = Q(\eta_{t,t+1}) \cdot \ldots \cdot Q(\eta_{t+m-1,t+m}).$$

Будем в дальнейшем буквами $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ обозначать цепочки вида $y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}$ любой конечной длины m. Запись $\eta_{t+1,t+m} = \mathcal{J}$ означает, что $\eta_{t+1} = y_{i_1}, \ldots, \eta_{t+m} = y_{i_m}$.

Через $Q(\mathcal{J})$ мы будем обозначать $Q(\eta_{t+1,t+m})$ при $\eta_{t+1,t+m} = \mathcal{J}$. Через τ_u^y мы будем обозначать момент u-го попадания в состояние y траектории цепи $\eta_t(\omega)$.

Для рассматриваемых цепей $\zeta_t(\omega)$ справедлива следующая

Теорема 1. *Для любого $y \in Y$ существует единственное разбиение пространства X на g (g не зависит от y) непересекающихся непустых классов $N_1^y, \ldots, N_g^y$, которое обладает следующими свойствами:*

1) *для некоторого цикла $\mathcal{I}$ цепи $\eta_t(\omega)$ положительной меры, начинающегося в y, матрица $Q(\mathcal{I})$ после перестановки столбцов и такой же перестановки строк (перенумеровки состояний из X) является блочно-диагональной, причем каждый j-й диагональный блок, соответствующий состояниям из N_j^y, содержит по крайней мере один ненулевой столбец;*

2) *траектории цепи $(\xi_t, P\{\cdot\,|\,\eta_{1,n}\})$, находящиеся в момент $l \leqslant n$ в состоянии $x' \in X$, при почти всех $\eta_{1,n}$ в момент времени τ_u^y, $\tau_u^y \leqslant n$, не могут находиться в разных классах разбиения $N_1^y, \ldots, N_g^y$;*

3) *траектории цепи* $(\xi_l, P\{\cdot\mid\eta_{1,n}\})$, *находящиеся в момент времени* τ_u^y, $\tau_u^y \leqslant n$, *в некотором классе* N_j^y, *при почти всех* $\eta_{1,n}$ *в момент* τ_v^y, $\tau_v^y \leqslant n$, *не могут находиться в разных классах разбиения* $N_1^y, \ldots, N_g^y$.

Теорема 1 позволяет описывать возможное поведение траектории цепи $(\xi_l, P\{\cdot\mid\eta_{1,n}\})$ при почти всех $\eta_{1,n}$. Зафиксируем произвольную траекторию $\eta_{1,n}$ положительной меры.

Траектории цепи $(\xi_l, P\{\cdot\mid\eta_{1,n}\})$, в начальный момент выходящие из некоторого состояния $x' \in X$, в момент τ_1^y, $\tau_1^y \leqslant n$, все с вероятностью 1 попадают в класс $N_{j_1}^y$. Затем в момент τ_2^y, $\tau_2^y \leqslant n$, все эти траектории с вероятностью 1 попадают в класс $N_{j_2}^y$ и так далее до момента τ_u^y, $\tau_u^y \leqslant n$. При этом для фиксированного значения $\eta_{1,n}$ выбор индексов $j_1, \ldots, j_u$ полностью определяется начальным состоянием x'.

Для дальнейшего изложения при $v \leqslant n$ введем в рассмотрение случайный вектор

$$\pi_v(\eta_{l,n}, x') = (P\{\xi_v = x_i \mid \eta_{l,n}, \xi_l = x'\}_{i=1,\ldots,M}).$$

Из (1) следует, что при каждом $x' \in X$ случайный вектор $\pi_v(\eta_{l,n}, x')$ определен для почти всех траекторий $\eta_{l,n}$ и почти всюду $\pi_v(\eta_{l,n}, x') = \pi_v(\eta_{l,v}, x')$. Пусть $\pi_v(\eta_{l,v}, x') = \pi(\eta_{l,v}, x')$.

С помощью теоремы 1 для семейства цепей $(\xi_l, P\{\cdot\mid\eta_{1,n}\})$ можно доказать справедливость утверждений (теоремы 2—4), которые характеризуют общие эргодические свойства этого семейства.

Теорема 2. *Для того чтобы*

$$M \max_{x', x'' \in X} \|\pi(\eta_{l,v}, x') - \pi(\eta_{l,v}, x'')\| \leqslant ce^{-\alpha(v-l)}, \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы $g = 1$.

Под нормой конечномерного вектора здесь и в дальнейшем мы понимаем эвклидову норму. Через c и α будут обозначаться положительные константы, не обязательно одинаковые.

Теорема 3. *Для любой пары* $x', x'' \in X$ *существует константа* $p(x', x'')$, *для которой*

$$|M\|\pi(\eta_{l,v}, x') - \pi(\eta_{l,v}, x'')\| - p(x', x'')| \leqslant ce^{-\alpha(v-l)}.$$

Пусть d — число циклических подклассов цепи $\zeta_t(\omega)$, а $\varphi_v^{x'}(\bar{t})$ — характеристическая функция случайного вектора $\pi(\eta_{1,v}, x')$.

Теорема 4. 1) *При каждом целом* $r \in [0, d)$ *существует функция* $\varphi_r^{x'}(\bar{t})$, *для которой*

$$|\varphi_{vd+r}^{x'}(\bar{t}) - \varphi_r^{x'}(\bar{t})| \leqslant c\|\bar{t}\| e^{-\alpha v}.$$

2) *Если* $d = 1$, *то существует функция* $\varphi(\bar{t})$, *не зависящая от* x', *для которой*

$$|\varphi_v^{x'}(\bar{t}) - \varphi(\bar{t})| \leqslant c\|\bar{t}\| e^{-\alpha v}.$$

Укажем одно из возможных следствий теоремы 4. Допустим, что задана однородная цепь Маркова $Q_t(\omega)$ со значениями в конечном пространстве стохастических матриц $Q_1, \ldots, Q_L$ одинаковой размерности $M \times M$. Пусть переходная матрица этой цепи равна

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1L} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{L1} & \cdots & p_{LL} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим стохастическую матрицу

$$P_Q = \begin{pmatrix} p_{11}Q_1 & \cdots & p_{1L}Q_L \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{L1}Q_1 & \cdots & p_{LL}Q_L \end{pmatrix},$$

где блок $p_{ij}Q_j$ есть матрица размера $M \times M$, каждый элемент которой равен соответствующему элементу матрицы Q_j, умноженному на число p_{ij}.

Следствие теоремы 4. *Если матрица P_Q является переходной матрицей Маркова, все $L \cdot M$ состояний которой существенны и образуют один эргодический класс с d циклическими подклассами, то для любого целого $r \in [0, d)$ каждая строка матрицы $Q^{+r}\ (\omega)^{\imath+pa}\partial \cdot \cdots \cdot (\omega)^{1}\partial = (\omega)$ слабо сходится к пределу при $v \to \infty$. Если $d = 1$, то при $v \to \infty$ слабый предел каждой строки матрицы $Q_1^v(\omega)$ не зависит от номера этой строки.*

2. В предыдущей части мы изучали неоднородные цепи $(\xi_l, P\{\cdot \mid \eta_{1,n}\})$, число различных переходных матриц которых было конечным и не зависело от n.

Если $\zeta_t(\omega)$ — произвольная однородная цепь Маркова с конечным числом возможных значений, то при почти всех $\eta_{1,n}$ цепь $(\xi_t, P\{\cdot \mid \eta_{1,n}\})$ в момент t управляется матрицей, зависящей от значений $\eta_{t,n}$. Укажем некоторые общие эргодические свойства семейства цепей $(\xi_l, P\{\cdot \mid \eta_{1,n}\})$ в этом общем случае. Для этого рассмотрим случайные векторы

$$\pi_v(\eta_{l,n}, \xi_l) = (P\{\xi_v = x_i \mid \eta_{l,n}, \xi_l\}_{i=1,\ldots,M}),$$

$$\pi_v(\eta_{l,n}) = (P\{\xi_v = x_i \mid \eta_{l,n}\}_{i=1,\ldots,M}).$$

Пусть

$$\pi(\eta_{l,n}, \xi_l) = \pi_n(\eta_{l,n}, \xi_l), \quad \pi(\eta_{l,n}) = \pi_n(\eta_{l,n}).$$

Теорема 5. *Если при каждом фиксированном l*

$$M\|\pi(\eta_{l,v}, \xi_l) - \pi(\eta_{l,v})\| \to 0$$

при $v \to \infty$, то при всех l

$$M\|\pi_v(\eta_{l,n}, \xi_l) - \pi_v(\eta_{l,n})\| \leqslant ce^{-\alpha(v-l)} \tag{3}$$

при $v \leqslant n$.

Неравенства (3) для частного случая цепей $\zeta_t(\omega)$, рассмотренного в п. 1, эквивалентны (2).

Если выполнено (3), то семейство условных цепей $(\xi_l, P\{\cdot \mid \eta_{1,n}\})$ является «эргодическим в среднем» и это позволяет получать общие предельные теоремы для этого семейства (центральную предельную теорему, закон больших чисел (см. ([2]))).

Приведем некоторые условия, накладываемые на переходную матрицу P цепи $\zeta_t(\omega)$, при которых выполнено (3).

Теорема 6. *Если матрица P является строго сжимающей, то выполнено* (3).

Теорема 7. *Если все состояния цепи $\zeta_t(\omega)$ существенные, образуют один эргодический класс и существуют $x \in X$, $y, y' \in Y$ такие, что*

$$P\{\xi_t = x, \eta_t = y \mid \xi_{t-1} = x', \eta_{t-1} = y'\} > 0$$

при всех $x' \in X$, то выполнено (3).

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
20 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Л. Стратонович, Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления, М., 1966. [2] З. И. Бежаева, Теория вероятностей и ее применения, 14, в. 3 (1971).