

С. БОГАТЫЙ

О ТЕОРЕМЕ ВЬЕТОРИСА ДЛЯ ШЕЙПОВ, ОБРАТНЫХ ПРЕДЕЛАХ И ОДНОЙ ЗАДАЧЕ Ю. М. СМЕРНОВА

(Представлено академиком П. С. Александровым 27 XI 1972)

А. Хорошо известно, что если пространство X обладает сложной локальной структурой, то теория гомотопий может ничего не говорить о его глобальных свойствах. Так, существует связный компакт Y , который не содержит ни одной дуги. Если P — связный полиэдр, то существуют только тривиальные отображения P в Y , т. е. отображений P в Y очень мало, чтобы сделать какое-нибудь заключение о строении пространства Y . В ⁽¹⁾ Борсук фактически заменяет компакт X на набор его окрестностей в гильбертовом кирпиче, которые обладают хорошими локальными свойствами. Этот же прием замены компакта X пространствами простой локальной структуры (в которых теория гомотопий содержательна) лежит в основе ANR -систем Мардешича и Сегала ⁽²⁾. Оказывается, что, в то время как гомотопические группы не коммутируют с взятием обратного предела (это видно на примере континуума Y , который является пересечением убывающей последовательности связных и локально связных компактов), т. е. гомотопические группы предела не равны пределу гомотопических групп, шейповые группы ⁽³⁾, стр. 122), которые отвлекаются от локальной структуры и учитывают лишь глобальные свойства пространств, непрерывны.

Пусть Z и X — произвольные компакты. Через $[Z, X]$ мы будем обозначать множество классов гомотопных отображений компакта Z в X . Через $[Z, X]$ будет обозначаться множество классов фундаментальных (аппроксимативных) последовательностей ⁽³⁾ из Z в X , или, что то же самое, множество шейповых отображений Z в X ⁽⁴⁾. Рассмотрим произвольную обратную последовательность компактов $\underline{X} = \{X_n, p_{n, n'}, N\}$.

Согласно ⁽⁵⁾ отображение $p_{n, n'}: X_{n'} \rightarrow X_n$ порождает отображение $p_{n, n'}^*: [Z, X_{n'}] \rightarrow [Z, X_n]$. $p_{n, n'} = p_{n, n'} \circ p_{n', n''}$, при $n \leq n' \leq n''$, поэтому $p_{n, n''}^* = p_{n, n'}^* \circ p_{n', n''}^*$. Таким образом, $\underline{X}^* = \{[Z, X_n], p_{n, n'}^*, N\}$ является обратной последовательностью множеств. Отметим, что если $Z = S^k$, а $p_{n, n'}$ сохраняет отмеченную точку, то $\underline{X}^*$ является обратной последовательностью групп $\pi_k(X_n)$. Пусть $\{X, p_n\}$ — обратный предел последовательности $\underline{X}$. Согласно ⁽⁵⁾, непрерывное отображение $p_n: X \rightarrow X_n$ порождает отображение $p_n^*: [Z, X] \rightarrow [Z, X_n]$. При этом $p_n = p_{n, n'} \circ p_{n'}$, поэтому $p_n^* = p_{n, n'}^* \circ p_{n'}^*$, т. е. отображения p_n^* порождают отображение $p^*: [Z, X] \rightarrow \text{Inv lim } \underline{X}^*$.

Теорема 1. Если $\{X, p_n\}$ является обратным пределом последовательности $\underline{X} = \{X_n, p_{n, n'}, N\}$, то $\{[Z, X], p_n^*\}$ является пределом последовательности $\underline{X}^* = \{[Z, X_n], p_{n, n'}^*, N\}$. Другими словами, p^* является изоморфизмом (т. е. взаимно однозначно и на, а при $Z = S^k$ и гомоморфизмом).

Отсюда следует, что изучение произвольного компакта X распадается на два этапа: 1) изучение «хороших» X_n и 2) изучение обратных последовательностей.

Всякое отображение $f: Z \rightarrow X$ порождает некоторый фундаментальный класс $[f]$ ⁽³⁾, (стр. 8), или, что то же самое, шейповое отображение ⁽²⁾. Причем, если два отображения f и g гомотопны, то $[f] = [g]$, т. е. существует естественное отображение $S: [Z, X] \rightarrow [Z, X]$. В ⁽³⁾ доказано, что если X обладает простой локальной структурой ($X \in ANR$), то это отображение S является взаимно однозначным и на для всех компактов Z , т. е. если $X \in ANR$, то $[Z, X] = \underline{[Z, X]}$. Существуют примеры ⁽³⁾, (стр. 11), когда $[Z, X] \neq \underline{[Z, X]}$ (иначе теория шейпов совпадала бы с теорией гомотопий). Ясно, что в этом случае $X \notin ANR$. Оказывается, что если от X потребовать простоту локальной структуры другого рода, то равенство $[Z, X] = \underline{[Z, X]}$ сохранится для некоторого класса компактов Z .

Теорема 2. Если $X \in LC^m$, а $\dim Z \leq m + 1$, то S является на, а при $\dim Z \leq m$ отображение S является и взаимно однозначным.

Эта теорема является аналогом теоремы Мардешича о связи сингулярных групп гомологий с группами гомологий Александрова — Чеха ⁽⁶⁾. Весь этот параграф говорит, что фундаментальные группы, построенные Борсуком совсем с других позиций, являются как бы «группами гомотопий Александрова — Чеха». Отметим, что если исходить из концепций работы ⁽²⁾, то эта аналогия является более естественной.

Каждый компакт можно представить в виде пересечения убывающей последовательности ANR -пространств, поэтому из теорем 1, 2 ⁽⁷⁾, теорема 11) и некоторых дополнительных построений следует

Теорема 3. Если $f: X \rightarrow Y$ — такое отображение компакта X на компакт Y , что $f^{-1}(y) \in LC^m$ и C^m для всех $y \in Y$, то $f^*: [Z, X] \rightarrow [Z, Y]$ является изоморфизмом для компактов Z размерности $\leq m$ и эпиморфизмом (т. е. на) для компактов размерности $\leq m + 1$.

Эта теорема по своему духу примыкает к теореме Виеториса для гомологий ⁽⁸⁾, но для полноты аналогии хотелось бы условие $f^{-1}(y) \in LC^m$ и C^m , которое не является шейпово инвариантным, заменить на условие $[S^k, f^{-1}(y)] = \{0\}$ при $k \leq m$. Если на множества $f^{-1}(y)$ наложить некое дополнительное условие (которое является шейпово инвариантным), то теорема останется справедливой. Но это условие формулируется сложно, а при его упрощении возникает довольно жесткое условие — подвижность, поэтому автор не считает целесообразным приводить его здесь. Однако на множества $f^{-1}(y)$ можно наложить некоторое простое шейповое условие (AC^m ⁽⁹⁾) так, что будут верны близкие теоремы.

Теорема 4. Пусть дано отображение $f: X \rightarrow Y$, что $X \in LC^m$ и $f^{-1}(y) \in AC^m$ для всех $y \in Y$. Тогда $Y \in LC^m$ и $f_*: [Z, X] \rightarrow [Z, Y]$ — изоморфизм для всех компактов Z размерности $\leq m$.

Для иллюстрации того, что условие $X \in AC^m$ не является очень жестким, отметим, что из $X \in LC^{m-1}$ и C^m следует $X \in AC^m$, из $X \in FAR$ ⁽¹⁰⁾ следует $X \in AC^m$. Кроме того AC^m -пространства инвариантны относительно взятия обратного предела (теорема 9).

Из теоремы 4 вытекают следующие две теоремы.

Теорема 5. Пусть дано отображение $f: X \rightarrow Y$, что $f^{-1}(y) \in AC^m$ для всех $y \in Y$.

Тогда $f^*: [Z, X] \rightarrow [Z, Y]$ изоморфизм для всех компактов Z размерности $\leq m$.

Теорема 6. Пусть дано отображение $f: X \rightarrow Y$ конечномерного компакта X на конечномерный компакт Y , что $f^{-1}(y) \in FAR$ для всех $y \in Y$.

Тогда $\text{Sh}X = \text{Sh}Y$, т. е. пространства X и Y определяют один и тот же шейповый класс.

Эта теорема является частичным ответом на вопрос Борсука, поставленный на симпозиуме в Херцег-Нови ⁽¹¹⁾.

Так как любой компакт X является обратным пределом последовательности $\underline{X} = \{X_n, p_n, n^*, N\}$ из компактных ANR -пространств X_n , то из теоре-

мы 1 и совпадения множеств $[Z, X_n]$ и $[Z, X_n]$ для ANR -пространств X_n следует, что если x_0 — точка, X , то $\pi_k(\bar{X}, x_0) = \text{Inv lim } \{\pi_k(X_n, x_0^n)\}$, где $x_0^n = p_n(x_0)$. Кроме того, так как для ANR -пространств множество фундаментальных классов естественным образом совпадает с множеством гомотопных отображений и с множеством аппроксимативных классов, то для любых компактов Z и X множества фундаментальных и аппроксимативных классов совпадают и равны множеству $[Z, X] = \text{Inv lim } \{[Z, X_n], (p_{n, n'})_{\#}, N\}$, где отображение $(p_{n, n'})_{\#}: [Z, X_{n'}] \rightarrow [Z, X_n]$ индуцировано отображением $p_{n, n'}: X_{n'} \rightarrow X_n$.

Б. Известно, что свойства AR и ANR не сохраняются при взятии обратного предела. Это видно хотя бы из того, что каждое FAR -пространство является пересечением убывающей последовательности AR -пространств ⁽¹²⁾, а произвольный компакт X можно получить пересечением убывающей последовательности ANR -пространств. Оказывается, что класс FAR -пространств инвариантен относительно взятия обратного предела.

Теорема 7. *Если компакт X является обратным пределом компактов из класса K , то пространство X аппроксимируется пространствами класса K ⁽¹³⁾.*

Отсюда и из ⁽¹³⁾ вытекают

Теорема 8. *Если компакт X является обратным пределом FAR -пространств, то $X \in FAR$.*

Следствие 1. *Если $X \in ANR$ и X является обратным пределом FAR -пространств, то $X \in AR$.*

Следствие 2. *Если компакт X является аппроксимационным абсолютным окрестностным ретрактом в смысле Клаппа ⁽¹⁴⁾ или Ногуши ⁽¹⁵⁾ и X является обратным пределом FAR -пространств, то X является аппроксимационным абсолютным ретрактом.*

Теорема 9. *Если компакт X является обратным пределом AC^m -пространств, то $X \in AC^m$.*

В. Хорошо известна теорема П. С. Александрова, характеризующая n -мерные пространства возможностью продолжения отображений в n -мерную сферу S^n ⁽¹⁶⁾. Ю. М. Смирновым была поставлена задача характеристики локально конечномерных пространств. Ю. Лисица дал характеристику таких пространств с помощью пространства $Y \in LC^\infty$ и C^∞ , но вопрос о возможности охарактеризовать локально конечномерные пространства с помощью локально стягиваемого пространства оставался открытым ⁽¹⁷⁾. Оказывается, что такой характеристики с помощью локально стягиваемых пространств дать нельзя. А именно, пусть X — компактный букет n -мерных кубов I^n , где $n = 1, 2, \dots$. X не локально конечномерно, но если дано множество A , замкнутое в X , и отображение $f: A \rightarrow Y$, где $Y \in LC$ и C^∞ , то, как следует из теоремы 10, всегда существует продолжение $F: X \rightarrow Y$.

Пусть X и Y — метрические (если не оговорено противное) пространства. Через X' обозначим множество точек не локальной конечномерности, т. е. $X' = X \setminus X_1$, где $X_1 = \{x: x \in X \text{ и существует окрестность } U_x, \text{ что } \dim \bar{U}_x < \infty\}$.

Теорема 10. *Если $\dim X' < \infty$ и дано отображение $f: A \rightarrow Y$, где A замкнуто в X , а $Y \in LC$ и C^∞ , то существует продолжение $F: X \rightarrow Y$.*

Теорема 11. *Если $\dim X' < \infty$ и дано отображение $f: A \rightarrow Y$, где A замкнуто в X , а $Y \in LC$, то существует продолжение $F: OA \rightarrow Y$ на некоторую окрестность OA множества A в X .*

Замечание 1. Теоремы 10 и 11 верны для более широкого класса пространств X , например для совершенно нормальных паракомпактов, а если Y сепарабельно, то от X можно требовать лишь совершенную нормальность.

Замечание 2. В теоремах 10 и 11 условие $\dim X' < \infty$ можно ослабить, считая X локально конечномерным в таком смысле, т. е. требуя су-

существования у каждой точки $x \in X$ такой окрестности Ox , что $\dim (\bar{O}x)' < \infty$.

Мы будем писать $Y \in LC(N)$, если для всякой точки $y \in Y$ и всякой ее окрестности U_y найдется меньшая окрестность V_y , что любое отображение конечномерного компакта в V_y гомотопно нулю в U_y .

Теорема 12. Если $\dim X' < \infty$, X — компактное пространство и дано отображение $f: A \rightarrow Y$, где A замкнуто в X , а $Y \in LC(N)$ и C^∞ , то существует продолжение $F: X \rightarrow Y$.

Теорема 13. Если $\dim X' < \infty$, X — компактное пространство и дано отображение $f: A \rightarrow Y$, где A замкнуто в X , а $Y \in LC(N)$, то существует продолжение $F: OA \rightarrow Y$ на некоторую окрестность OA множества A в X .

Следствие 3. Если X — компактное пространство, $\dim X' < \infty$ и $X \in LC(N)$ и C^∞ , то $X \in LC$ и C .

Следствие 4. Если X — компактное пространство, $\dim X' < \infty$ и $X \in LC(N)$, то $X \in LC$.

Теорема 14. Если X' — конечное множество, $X \in LC^\infty$, а в точках множества X' пространство X локально стягиваемо, то $X \in ANR$.

Замечание 3. Условие локальной стягиваемости пространства X в точках множества X' существенно, потому что существует компакт $X \in LC^\infty$, у которого множество X' состоит из одной точки, но которое не является ANR -пространством. В случае, когда множество X' пусто, получается теорема Лисицы⁽¹⁷⁾.

В заключение автор пользуется возможностью выразить благодарность проф. Ю. М. Смирнову за заботу и помощь.

Примечание при корректуре. Автору стало известно, что теорему 6 получил независимо Шер.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ K. Borsuk, Fund. Math., 62, 223 (1968). ² S. Mardešić, J. Segal, Fund. Math., 72, 41 (1971). ³ K. Borsuk, Theory of Shape, Aarhus, 1971. ⁴ S. Mardešić, Glasnik Mat., 6, 153 (1971). ⁵ S. Godlewski, W. Holsztinsky, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., Astr., Phys., 17, 373 (1969). ⁶ S. Mardešić, Michig. Math. J., 6, 151 (1959). ⁷ S. Smale, Proc. Am. Math. Soc., 8, 604 (1957). ⁸ L. Vietoris, Math. Ann., 97, 454 (1927). ⁹ K. Borsuk, Fund. Math., 67, 265 (1970). ¹⁰ K. Borsuk, Fund. Math., 64, 55 (1969). ¹¹ K. Borsuk, Proc. Intern. Symp. Topology and its Applications, Herceg-Novi, 1968, Beograd, 1969. ¹² D. M. Hуman, Fund. Math., 64, 91 (1969). ¹³ С. А. Богатый, VI Всесоюз. топол. конфер. Тезисы, Тбилиси, 1972. ¹⁴ H. Michael, H. Clapp, Fund. Math., 70, 117 (1971). ¹⁵ H. Noguchi, Kodai Math. Seminar Reports, 1, 20 (1953). ¹⁶ P. Alexandroff, Proc. Roy. Soc. A., 189, 11 (1947). ¹⁷ Ю. Лисица, ДАН, 205, 777 (1972).