

М. И. ШВИДЛЕР, В. Л. ДАНИЛОВ

# О РАСЩЕПЛЕНИИ ЗАДАЧ МНОГОМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 15 XII 1972)

При рассмотрении одномерной задачи фильтрации двух несжимаемых несмешивающихся жидкостей Бакли и Леверетт свели ее к задаче Коши для нелинейного уравнения в частных производных относительно одной функции — насыщенности <sup>(1)</sup>. Этот результат позднее был обобщен Рапортом и Лисом, которые учли капиллярное давление <sup>(2)</sup>. Одномерная задача двухфазной фильтрации при заданных на границах области течения давлениях приведена к интегродифференциальному уравнению относительно насыщенности В. П. Пилатовским <sup>(3)</sup>.

В указанных работах при сведении системы уравнений к одному уравнению относительно насыщенности существенно использована имеющая место для одномерных потоков независимость суммарной объемной скорости от пространственной координаты.

В заметке показана возможность расщепления задач определения полей давлений и насыщенности и получения уравнения для одной функции — насыщенности — в достаточно общем случае двух- и трехмерной фильтрации несжимаемых жидкостей в недеформируемой неоднородной анизотропной пористой среде с учетом капиллярных и гравитационных сил.

Уравнения изотермической фильтрации двух несжимаемых несмешивающихся жидкостей в неоднородной анизотропной пористой среде могут быть записаны в виде

$$m \partial_t s = (-1)^i \nabla [k K_i \nabla (p_i + \rho_i g h)], \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где  $m(\mathbf{r})$  — открытая пористость в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ ,  $s$  — насыщенность порового объема смачивающей жидкостью ( $i = 2$ ),  $k(\mathbf{r})$  — тензор (второго ранга) абсолютной проницаемости,  $K_i = f_i(s) / \mu_i$ ,  $f_i(s)$  — относительная фазовая проницаемость для  $i$ -й жидкости,  $\mu_i$  — динамическая вязкость,  $p_i$  — гидродинамическое фазовое давление,  $\rho_i$  — плотность,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $h(\mathbf{r})$  — превышение точки с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  над плоскостью нулевого гравитационного потенциала,  $\partial_t s = \partial s / \partial t$ .

Вводя межфазное (капиллярное) давление  $p_c(\bar{k}, s) = p_1 - p_2$ , где  $\bar{k}$  — некоторая норма тензора  $k$ , а также осредненное давление <sup>(3)</sup>

$$p = K^{-1}(K_1 p_1 + K_2 p_2), \quad K = K_1 + K_2, \quad (2)$$

систему (1) можно преобразовать к виду

$$m \partial_t s = (-1)^i \nabla \{k K_i \nabla [p - (-1)^i (K - K_i) K^{-1} p_c + \rho_i g h]\}. \quad (3)$$

Учитывая, что  $K_i(s)$  — скаляр и обозначая штрихом производную по  $s$ , систему (3) представим в иной форме:

$$(-1)^i m \partial_t s = K_i \nabla (k \nabla p) + K_i' (k \nabla p, \nabla s) + \nabla \{k K_i \nabla [\rho_i g h - (-1)^i (K - K_i) K^{-1} p_c]\}. \quad (4)$$

Деля уравнения (4) соответственно на  $K_i'$  и вычитая из первого ( $i = 1$ ) второе, получаем

$$\nabla (k \nabla p) = \Phi(\mathbf{r}, s) + \Psi(\mathbf{r}, s) \partial_t s, \quad (5)$$

где  $\Phi$  — дифференциальная форма второго порядка по пространственным переменным и функция  $\Psi$  выражаются соотношениями

$$\Phi(\mathbf{r}, s) = K_2' H^{-1} \nabla [k K_1 \nabla (\rho_1 g h + K_2 K^{-1} p_c)] - \\ - K_1' H^{-1} \nabla [k K_2 \nabla (\rho_2 g h - K_1 K^{-1} p_c)], \quad (6)$$

$$\Psi(\mathbf{r}, s) = m K' H^{-1}, \quad H = K_1' K_2 - K_2' K_1. \quad (7)$$

Учитывая, что на функции  $p_i$  и, следовательно, на функцию  $p$  налагаются дополнительные условия, определим функцию  $\varphi$  как решение уравнения

$$\nabla(k \nabla p) = 0, \quad (8)$$

удовлетворяющее на границах условиям, наложенным на  $p$ . Обозначив  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  функцию Грина уравнения (8), удовлетворяющую соответствующим однородным граничным условиям, можно, обращаясь к (5), записать

$$p = \varphi_i + \int_{(D)} (\Phi + \Psi \partial_i s)_0 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dD_0, \quad (9)$$

где  $D$  — область течения, а нижний индекс «0» означает, что соответствующее выражение взято в точке  $\mathbf{r}_0$ .

Подставляя интегральное представление функции  $p$  в одно из уравнений системы (4), например, в уравнение ( $i = 1$ ), тем самым исключаем  $p$  и приходим к функциональному (интегродифференциальному) уравнению относительно единственной искомой функции — насыщенности  $s$ . Для придания функциональному уравнению симметричного вида удобнее, однако, вычесть из второго ( $i = 2$ ) первое, предварительно умножив их соответственно на  $K_1$  и  $K_2$ :

$$m K \partial_i s + (k \nabla p, \nabla s) H = \\ = K_1 \nabla [k K_2 \nabla (\rho_2 g h - K_1 K^{-1} p_c)] - K_2 \nabla [k K_1 \nabla (\rho_1 g h + K_2 K^{-1} p_c)]. \quad (10)$$

Подставив (9) в (10), окончательно получим

$$m K \partial_i s + \int_{(D)} [\Phi(\mathbf{r}_0, s_0) + \Psi(\mathbf{r}_0, s_0) \partial_i s_0] (k(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \nabla s) H(s) dD_0 + \\ + (k \nabla \varphi, \nabla s) = K_1 \nabla [k K_2 \nabla (\rho_2 g h - K_1 K^{-1} p_c)] - K_2 \nabla [k K_1 \nabla (\rho_1 g h + K_2 K^{-1} p_c)]. \quad (11)$$

Если пренебречь капиллярными и гравитационными силами ( $p_c = 0$ ,  $h = \text{const}$ ) и считать среду однородной и изотропной, то уравнение (11) переходит в следующее:

$$m K \partial_i s = k H(s) \int_{(D)} \Psi(\mathbf{r}_0, s_0) \partial_i s_0 (\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \nabla s) dD_0 + k (\nabla \varphi, \nabla s) = 0. \quad (12)$$

Для (11) или (12) может быть сформулирована задача Коши определения  $s(\mathbf{r}, t)$  при известной  $s(\mathbf{r}, 0)$  и соответствующих граничных условиях.

Задача нахождения фазовых давлений  $p_i(\mathbf{r}, t)$ , если таковую требуется решить, после определения  $s(\mathbf{r}, t)$  сводится к кубатурам (9).

Отметим, что метод зональной линеаризации, предложенный в работе (<sup>3</sup>), можно интерпретировать как приближенный метод решения уравнения (11) после перехода в нем к лагранжевым переменным.

Отметим также, что аналогично может быть достигнуто расщепление задачи о фильтрации смешивающихся жидкостей и получено функциональное уравнение концентрации. В случае совместной фильтрации  $n$  несжимаемых жидкостей аналогично выписывается система  $(n - 1)$  функциональных уравнений относительно насыщенностей (концентраций).

Всесоюзный нефтегазовый научно-исследовательский институт  
Москва

Поступило  
15 XII 1972

Московский институт инженеров  
геодезии, аэрофотосъемки и картографии

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> S. F. Buckley, M. C. Leverett, Trans. AJME, 146 (1942). <sup>2</sup> L. A. Rapoport, W. J. Leas, Trans. AJME, 198 (1953). <sup>3</sup> В. Л. Данилов, Р. М. Кац, ДАН, 201, № 2 (1971). <sup>4</sup> В. П. Пилатовский, Тр. ВНИИнефти, в. 21, 1959.