Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. Э. ЦЫРЛИН

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТОКАХ В ДИЭЛЕКТРИКЕ И НЕКОТОРЫХ АНАЛОГИЯХ ИЗ ОБЛАСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 10 XII 1971)

Если в диэлектрическое тело вводится (или введен) объемный заряд подвижных носителей, его движение (в пренебрежении диффузией носителей и собственной проводимостью тела) описывается системой

$$\partial q / \partial t + \mu \operatorname{div} q \mathbf{E} = 0, \tag{1}$$

$$\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = q, \tag{2}$$

где q — плотность заряда, μ — подвижность носителей; остальные обозначения стандартны.

Если по условиям задачи поле имеет лишь одну составляющую — декартову (E_x) или радиальную цилиндрическую (E_ρ) или радиальную сферическую (E_r), первый интеграл системы может быть представлен в виде

$$\partial u / \partial t + u\, \partial u / \partial \xi = C(t), \tag{3}$$

где $\xi = x$, $u = \mu E$ или $\xi = {}^1/_2\rho^2$, $u = \mu\rho E$ или $\xi = {}^1/_3 r^3$, $u = \mu r^2 E$ соответственно указанным случаем симметрии, а $C(t)$ пропорциональна полному току.

Общее решение квазилинейного уравнения (3) может быть получено в неявной форме:

$$u = \int_0^t C(t')\, dt' + f\left(\xi - ut + \int_0^t t' C(t')\, dt'\right), \tag{4}$$

где f — произвольная функция.

В рассматриваемых ниже релаксационных задачах $C(t) = 0$ и общее решение имеет следующие эквивалентные выражения:

$$u = f(\xi - ut), \tag{5а}$$

$$u = F\left(t - \frac{\xi - \mathrm{const}}{u}\right), \tag{5б}$$

где f и F — произвольные функции.

На поверхности, в направлении от которой движутся носители, обычно может быть задано граничное условие вида

$$u|_{\xi=\xi_0} = \psi(t). \tag{6}$$

(Простейшие примеры: распределение заряда, симметричное относительно плоскости $x = 0$, или (вырожденные случаи) распределения в сплошных цилиндре и сфере с соответствующей симметрией; в этих случаях $u|_{\xi=0} = 0$. Другие примеры рассматриваются ниже.)

Начальное условие

$$u|_{t=0} = \varphi(\xi) \tag{7}$$

определяется из (2) по начальному распределению заряда:

$$\varphi(\xi) = \frac{\mu}{\varepsilon}\int_{\xi_0}^{\xi} q(\xi', 0)\,d\xi' + a, \tag{8}$$

где

$$a = \varphi(\xi_0) = \psi(0). \tag{9}$$

Разобьем область изменения переменных ξ и t (рис. 1) на две зоны: $\xi - \xi_0 > at$ и $\xi - \xi_0 < at$. Полагая

$$u = \begin{cases} \varphi(\xi - ut), & dt < \xi - \xi_0, \\ \psi\left(t - \dfrac{\xi - \xi_0}{u}\right), & at > \xi - \xi_0, \end{cases} \tag{10}$$

получаем, согласно (5), решение, удовлетворяющее условиям (6) и (7). На границе между зонами ($\xi = \xi_0 + at$) оба выражения (10) при подстановке $u = a$ обращаются (согласно (9)) в тождества. Отсюда следует, что представление (10) непрерывно и поэтому является решением задачи.

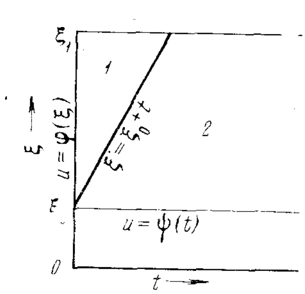

Рис. 1

При $a = 0$ первое из выражений (10) справедливо для всей области изменения переменных. При $a \neq 0$ и временах, бóльших $(\xi_1 - \xi_0)/a$, где ξ_1 соответствует второй поверхности тела, второе из выражений (10) справедливо для всего объема.

Решение (10), как видно, содержит следующий общий результат: значение u, равное a, перемещается от поверхности ξ_0 со скоростью (в переменных ξ, t), равной a.

Рассмотрим несколько частных задач, представляющих непосредственный интерес.

1. В ограниченную область $\xi_0 < \xi < \xi'$ введен объемный заряд постоянной плотности q_0; $u|_{\xi=\xi_0} = 0$ *.

Согласно (8),

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} Q(\xi - \xi_0), & \xi_0 < \xi < \xi', \\ Q(\xi' - \xi_0), & \xi' < \xi < \xi_1, \end{cases}$$

где $Q = \mu q_0 / \varepsilon$, и решение (поскольку $a = 0$) имеет вид

$$u = \begin{cases} Q(\xi - \xi_0 - ut), & \xi_0 < \xi - ut < \xi', \\ Q(\xi' - \xi_0), & \xi' < \xi - ut < \xi_1. \end{cases}$$

Разрешая его относительно u, получаем

$$u = \begin{cases} \dfrac{Q(\xi - \xi_0)}{1 + Qt}, & \xi - \xi_0 < (\xi' - \xi_0)(1 + Qt), \\ Q(\xi' - \xi_0), & \xi - \xi_0 > (\xi' - \xi_0)(1 + Qt), \end{cases} \tag{11}$$

а для плотности заряда соответственно $q = q_0(1 + Qt)^{-1}$ в первой зоне и 0 — во второй зоне. При $\xi_1 - \xi_0 \leqslant (\xi' - \xi_0)(1 + Qt)$ остается лишь первое из выражений (11); знак равенства соответствует моменту достижения «передовыми» зарядами поверхности ξ_1 и началу образования на ней

* Для плоского слоя это граничное условие выполняется, когда со стороны поверхности ξ_1 имеется электрод, расположенный много ближе к слою, чем электроды, расположенные со стороны поверхности ξ_0. Оно выполняется также на внутренних поверхностях полых цилиндра и сферы (в частности при $\xi_0 = 0$), если в полостях отсутствуют заряды и электроды. Предполагается также отсутствие при $\xi = \xi_0$ поверхностного заряда (последний рассматривается в следующей задаче).

поверхностного заряда (или стоку заряда, если потенциал этой поверхности фиксирован). Частное решение вида (11) для плоского слоя встречалось в литературе ([1]) (оно легко получается подстановкой в уравнение (3) (при $C = 0$), $u = f_1(\xi)\cdot f_2(t)$).

2. Пусть на поверхность ξ_0 достаточно быстро внесен равномерный поверхностный заряд, причем $q(\xi, 0) = 0$, так что $u|_{t=0} = \text{const} = a$. Предположим сначала, что релаксация этого заряда происходит благодаря переходу носителей с поверхностных уровней в свободное состояние с вероятностью α сек$^{-1}$. Тогда граничной функцией на заряженной поверхности будет, очевидно, $\psi(t) = ae^{-\alpha t}$, а решением соответственно

$$u = \begin{cases} a, & at < \xi - \xi_0, \\ a \exp\left(\dfrac{\xi - \xi_0}{u} - t\right), & at > \xi - \xi_0, \end{cases} \tag{12}$$

и лишь второе равенство — при $at > \xi_1 - \xi_0$.

Предположим теперь, что на поверхности $\xi = \xi_1$ имеется контакт, способный инжектировать носители противоположного знака, а поверхностный заряд сравнительно сильно связан. Согласно приближенной теории контактов, можно считать заданной приконтактную концентрацию носителей n_1. Это легко приводит к граничному условию вида $u|_{\xi_1} = a\exp(-\alpha_1 t)$, где $\alpha_1 = e\,\mu n_1/\varepsilon$, и, очевидно, аналогичному решению релаксационной задачи.

3. Рассмотрим процесс разрядки слоя, в котором до момента размыкания внешней цепи протекал ток, ограниченный объемным зарядом. Начальному состоянию соответствует стационарное решение (3) при при $C \neq 0$, и граничном условии $u\,|_{\xi_0} = 0$ (а также при заданной разности потенциалов V, определяющей значение C). Это решение имеет вид $u = \sqrt{2C(\xi - \xi_0)}$, а решение релаксационной задачи (поскольку $a = 0$) получается отсюда заменой ξ на $\xi - ut$; оно может быть выражено в явной форме и, например, для плоского слоя дает

$$E = \frac{3V}{2d}\left[\sqrt{\frac{x}{d} + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2} - \frac{t}{\tau}\right], \tag{13}$$

где d — толщина слоя, $\tau = 4d^2(3\mu V)^{-1}$.

Величина τ равна времени движения носителя через слой при начальном распределении поля $\tau = \varepsilon\rho_d$, где ρ_d — объемное сопротивление при $x = d$ в исходном режиме.

Выражение полной производной скорости при движении сплошной среды или пучка частиц в рассмотренных случаях симметрии принимает вид левой части (3), если под ξ понимать соответственно x, ρ или r, а под u — скорость. Уравнение вида

$$\partial v/\partial t + v\,\partial v/\partial\xi = 0$$

описывает некоторый класс нелинейных волн ([2]), в частности, простые волны в газе, волны в мелкой воде и в пучке невзаимодействующих частиц. Формулы (5) дают общий вид таких волн.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт электронно-лучевых приборов
Ленинград

Поступило
5 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. P. Batra, K. Keiji Kanazawa, H. Seki, J. Appl. Phys., **41**, 3416 (1970).
[2] Г. Г. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН, **103**, в. 2, 194 (1971).