

А. Б. ШАБАТ

ОБ УРАВНЕНИИ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИСА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 18 XII 1972)

Данная работа распадается на две части. Сначала излагается схема построения класса квазилинейных уравнений, которые сводятся к линейным указанной ниже заменой (4) искомых функций. Представителем этого класса является, например, уравнение

$$u_t + u_{xxx} + c(x, t)u_x + c_x(x, t)u + uu_x = 0, \quad (1)$$

имеющее приложения в гидродинамике. Далее в качестве каждого примера детально исследуется задача Коши для уравнения Кортевега — де Фриса ($c \equiv 0$). Начало этому исследованию было положено в работе (1), но, несмотря на многочисленные публикации, математически точные результаты публикуются, по-видимому, впервые. Другой подход к вопросу об интегрировании уравнения Кортевега — де Фриса можно найти в работе (2).

Излагаемая теория основана на алгебре операторов, обладающих свойством дифференцирования относительно свертки функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$L(u * v) = Lu * v + u * Lv, \quad (u * v)(x, y) \stackrel{\text{опр}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, s)v(s, y) ds. \quad (2)$$

Точнее, мы ограничимся подалгеброй $\mathcal{A}$, порожденной следующими операторами умножения и дифференцирования:

$$L_0 = f(t, x) - f(t, y), \quad D_0, \quad L_m = D_1^m + (-1)^{m-1}D_2^{m-1}, \quad m \geq 1. \quad (3)$$

Мы предполагаем, что функции в формуле (2) зависят еще от параметра: $u = u(t, x, y), \dots$, и через D_k , $k = 0, 1, 2$, обозначаем операторы дифференцирования по переменной с соответствующим номером.

Нелинейная замена, о которой говорилось в начале статьи, близка к соотношению, связывающему ядра интегрального оператора и его резольвенты:

$$\psi(t, x, y) + \chi(t, x, y) + \int_x^\infty \psi(t, x, s)\chi(t, s, y) ds = 0. \quad (4)$$

Формула, аналогичная (2), принимает теперь следующий вид. Пусть

$$w(x, y) = v(x, y) + \int_x^\infty u(x, s)v(s, y) ds, \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Тогда для любого оператора $L \in \mathcal{A}$ существует оператор $\tilde{L}$, отличающийся от L младшими членами и зависящий от выбора вольтеррова ядра $u(x, y)$, такой, что

$$\begin{aligned} \tilde{L}w(x, y) &= Lv(x, y) + \int_x^\infty u(x, s)(Lv)(s, y) ds + \\ &+ \int_x^\infty (\tilde{L}u)(x, s)v(s, y) ds \quad \forall v \in C_0^\infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Например,

$$\begin{aligned}\tilde{L}_1 = L_1, \quad \tilde{L}_2 = L_2 + 2 \frac{d}{dx} u(x, x), \quad \tilde{L}_3 = L_3 + 3 \frac{d}{dx} u(x, x) D_1 + \\ + 3 \frac{d}{dx} \left(D_1 u(x, x) + \frac{1}{2} u^2(x, x) \right).\end{aligned}$$

Начиная систематическое изучение замены (4), мы принимаем

Определение 1. Непрерывную функцию $K(x, y)$ назовем регулярным ядром, если определенная при всех значениях (x_0, y_0) по-
лунорма

$$\| \| K \| \| (x_0, y_0) \stackrel{\text{онп}}{=} \left\{ \sup_{x > x_0} \int_{y_0}^{\infty} |K(x, y)| dy + \sup_{y > y_0} \int_{x_0}^{\infty} |K(x, y)| dx \right\} \rightarrow 0 \quad (6)$$

при $x_0 + y_0 \rightarrow +\infty$.

Функцию K назовем регулярным дифференцируемым ядром, если производные от K также являются регулярными ядрами.

Лемма 1. Предположим, что регулярные дифференцируемые ядра $\chi(t)$, $\psi(t)$, зависящие непрерывно дифференцируемым образом от параметра t , связаны уравнением (4). Тогда в обозначениях формулы (5) $L\chi = 0 \Leftrightarrow \tilde{L}\psi = 0$.

При заданном ψ соотношение (4) является вольтерровым уравнением относительно χ . При заданном χ уравнение (4) теряет вольтерров характер и превращается в уравнение типа Винера — Хопфа

$$(1 + \hat{\chi}(t, x)) f(y) = g(y) \text{ при } y > x, \quad \hat{\chi}(t, x): f \rightsquigarrow \int_x^{\infty} f(s) \chi(t, s, y) ds. \quad (7)$$

Оператор, переводящий решение $u(t, x)$ нелинейного уравнения в решение $v(t, x)$ линейного уравнения, является произведением двух вольтерровских:

$$u(t, x) \rightsquigarrow^{V_1} \varphi(t, x, y) \rightsquigarrow^{V_2} \chi(t, x, y) \rightsquigarrow v(t, x) = \frac{d}{dx} \chi(t, x, x). \quad (8)$$

Здесь оператор V_2 действует в пространстве регулярных ядер и, по определению, переводит заданное ядро ψ в решение χ вольтерровского уравнения (4). Оператор V_1 переводит заданную на прямой функцию $u(x)$ такую, что при некотором $a > -\infty$

$$\int_a^{\infty} \left\{ |xu(u)| + \sum_{k=0}^m |D^k u(x)| \right\} dx < \infty \quad (9)$$

в регулярное ядро ψ , которое определяется как решение задачи Гурса:

$$\tilde{L}\psi = 0, \quad \frac{d}{dx} \psi(x, x) = u(x).$$

В случае уравнения Кортевега — де Фриса

$$u_t + u_{xxx} + 12uu_x = 0 \quad (10)$$

роль оператора L в задаче Гурса играет оператор L_2 (см. (3)):

$$\tilde{L}_2 \psi \equiv [D_1^2 - D_2^2 + 2u(t, x)] \psi(t, x, y) = 0, \quad \psi(t, x, x) = - \int_x^{\infty} u(t, s) ds. \quad (11)$$

В случае (1) в качестве L нужно выбрать $L_2 + L_0$. Доказательство разрешимости задачи Гурса (11) приведено в книге ⁽³⁾, стр. 121.

Теорема 1. Пусть в области $\Omega = \{(t, x): 0 \leq t \leq T, x > \omega(t) \geq -\infty\}$ задано решение $u(t, x)$ уравнения (10), удовлетворяющее условиям (9) при $m = 3$ равномерно по $t \in [0, T]$. Тогда замена (8) переводит это решение в функцию $v(t, x)$ из того же класса, которая в области Ω является решением линейного уравнения $v_t + v_{xxx} = 0$.

Схема доказательства. В силу леммы 1 и определения (11) оператора V_1 для доказательства теоремы достаточно проверить, что

$(D_0 + 4\tilde{L}_3)\psi = 0$. Из формулы (5) получаем, что регулярное ядро $\varphi = (D_0 + 4\tilde{L}_3)\psi$ удовлетворяет уравнению $L_2\varphi + 2u\varphi = 0$. Вычислив значения производных от решения задачи Гурса (11) на характеристике $\{y = x\}$, находим, что

$$(D_1\psi + {}^{1/2}\psi^2)(t, x, x) = {}^{1/2}u(t, x), \quad 4\tilde{L}_3\psi(t, x, x) = (D_1^2u + 6u^2)(t, x). \quad (12)$$

Легко видеть теперь, что из уравнения Кортевега — де Фриса следует, что $\varphi(t, x, x) = 0$ и, в силу единственности решения задачи Гурса, $\varphi = 0$.

Рассмотрим далее детально вопрос об обращении замены (8) в случае уравнения Кортевега — де Фриса. В рассматриваемом случае $\chi(t, x, y) = \chi(t, x + y)$, что позволяет отождествить v и χ . При этом мы получаем

$$(D_0 + 8D_1^3)\chi(t, x) = 0. \quad (13)$$

Пусть при $t \geq 0$ задано решение линейного уравнения $v(t, x)$, удовлетворяющее условиям (9) равномерно по $t \in [0, T]$. Тогда существует область Ω вида, указанного в теореме 1, такая, что оператор (7) $\chi(t, x)$ имеет при $(t, x) \in \Omega$ норму в $L_1(x, \infty)$, меньшую 1. Можно убедиться (см. лемму 1 и (12)), что обращение замены (8) приводит к решению уравнения (10), определенному в области Ω . Таким образом, оператор, обратный к (8), переводит решения линейного уравнения Кортевега — де Фриса, но может сузить область определения решения. Рассмотрим, например, фундаментальное решение задачи Коши для уравнения (13):

$$\mathcal{E}(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(8\xi^3 t + \xi x)} d\xi = \frac{1}{t^{1/3}} \Phi\left(\frac{x}{2t^{1/3}}\right),$$

$$\Phi(x) \simeq \frac{(x/3)^{-1/3}}{8\sqrt{3\pi}} e^{-2(x/3)^{3/2}} \text{ при } x \rightarrow +\infty. \quad (14)$$

Замена, обратная к (8), переводит $\chi(t, x) = \kappa \mathcal{E}(t, x)$ в автомодельное (см. ниже лемму 2) решение $t^{-2/3}f(x/t^{1/3})$ уравнения Кортевега — де Фриса. При этом функция f определяется как решение нелинейного дифференциального уравнения с заданной асимптотикой

$$f''' - {}^{1/3}xf - {}^{2/3}f + 12ff' = 0, \quad f(x) \simeq -\kappa\Phi'(x) \text{ при } x \rightarrow +\infty. \quad (15)$$

Лемма 2. Пусть $\chi(t, x, y) = \kappa \mathcal{E}(t, x + y)$, тогда уравнение (4) однозначно разрешимо в классе ядер регулярных для $x, y > l(\kappa)t^{1/3}$, причем $l(\kappa) < -1$ при $|\kappa| \leq 1$. Решение ψ является в этом случае автомодельным:

$$\begin{aligned} \psi(t, x, y) &= \frac{1}{t^{1/3}} \tilde{\Phi}\left(\frac{x}{t^{1/3}}, \frac{y}{t^{1/3}}\right), \text{ где } \tilde{\Phi}(x, y) + \kappa \Phi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \\ &+ \kappa \int_x^\infty \tilde{\Phi}(x, s) \Phi\left(\frac{s+y}{2}\right) ds = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Теорема 2. Задача Коши для уравнения (10) однозначно разрешима в пространстве $C^1([0, \infty); S)$. Здесь S — пространство Шварца быстро убывающих гладких функций и для ее решения $u(t, x)$ в области $\{(t, x): x > -t^{1/3}\}$ справедливо асимптотическое представление в виде конечной суммы частных решений уравнения Кортевега — де Фриса типа бегущей волны:

$$\sup_{x > -t^{1/3}} \left| u(t, x) - \sum_{k=1}^N u_k(x - 4\lambda_k^2 t) \right| \leq \frac{\text{const}}{t^{2/3}} \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Здесь через λ_k^2 , $k = 1, \dots, N$, обозначены собственные значения оператора $A = d^2/dx^2 + q(x)$, $q(x) = 2u(0, x)$, в $L_2(-\infty, +\infty)$.

Схема доказательства. По начальным данным $u_0(x) = u(x, 0)$ для уравнения (10) находим (см. теорему 1) начальные данные $\chi^0 =$

$= V_2 V_1 u^0$ для уравнения (13). В теории рассеяния для оператора Штурма — Лиувилля установлено (см. (5)), что χ^0 допускает представление в виде

$$\chi^0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi) e^{i\xi x} d\xi + \sum_{k=1}^N c_k e^{-\lambda_k x}, c_k > 0,$$

где, как это ни странно,

$$|\rho(\xi)| < 1 \text{ при } \xi \neq 0, \quad |\rho(0)| = 1 \Rightarrow \rho(0) = -1. \quad (17)$$

Легко убедиться (см. (5)), что условия (17) обеспечивают обратимость оператора (7) $1 + \hat{\chi}(0, x)$ при любом x . Решая линейное уравнение (13) находим, что

$$\chi(t, x) = \chi_1(t, x) + \sum_{k=1}^N c_k e^{s\lambda_k^3 t} e^{-\lambda_k x}, \quad \chi_1(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi) e^{i(s\xi^3 t + \xi x)} d\xi, \quad (18)$$

и, следовательно, условия (17) выполняются при всех $t > 0$. Для доказательства теоремы существования остается проверить, что $u^0 \in S \Leftrightarrow \rho \in S$ и удовлетворяет условиям (17).

Лемма 3. Часть решения, соответствующая непрерывному спектру оператора A , допускает асимптотическое представление через функцию Эйри (14)

$$\left| \chi_1(t, x) - \frac{\kappa}{t^{1/3}} \Phi\left(\frac{x}{t^{1/3}}\right) \right| \leq \frac{1}{t^{2/3}} K\left(\frac{x}{t^{1/3}}\right), \quad K \in L_1(0, \infty), \quad (19)$$

где $\kappa = \rho(0)$ и, следовательно, $|\kappa| \leq 1$. Справедливы также оценки, полученные формальным дифференцированием соотношения (19).

Из лемм 2 и 3 нетрудно получить теперь асимптотическое представление для решения $\psi_1 = V_2^{-1} \chi_1$ уравнения (4) через автомодельное решение (16):

$$\left| \psi_1(t, x, y) - \frac{1}{t^{1/3}} \tilde{\Phi}\left(\frac{x}{t^{1/3}}, \frac{y}{t^{1/3}}\right) \right| \leq \frac{1}{t^{2/3}} \tilde{K}\left(\frac{x}{t^{1/3}}, \frac{y}{t^{1/3}}\right), \quad x, y > -t^{1/3},$$

где $\tilde{K}$ — регулярное ядро. Отсюда следует утверждение теоремы, если предположить дополнительно, что оператор A не имеет собственных значений. Доказательство теоремы в общем случае проводится индукцией по числу собственных значений оператора A и основано на следующей лемме, позволяющей явно вычислить добавок от введения нового собственного значения.

Лемма 4. Пусть решения $\tilde{\chi}, \chi$ вида (18) линейной задачи связаны соотношением $\chi = \tilde{\chi} + c e^{8\lambda^3 t} e^{-\lambda x}$; $c, \lambda > 0$. Тогда соответствующие решения уравнения Кортевега — де Фриса связаны формулой

$$\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - \frac{d}{dx} \frac{c \psi_\lambda^2(t, x)}{1 + c \int_x^\infty \psi_\lambda^2(t, s) ds},$$

$$\psi_\lambda(t, x) = e^{4\lambda^3 t} \left(e^{-\lambda x} + \int_x^\infty \psi(t, x, s) e^{-\lambda s} ds \right).$$

Здесь ядро ψ соответствует невозмущенному решению $\psi = V_2^{-1} \chi$.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
13 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ C. Gardner, J. Green et al., Phys. Rev. Lett., 19, 1095 (1967). ² В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев, Функциональный анализ, 5, в. 4, 18 (1971). ³ В. А. Марченко, Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля, Киев, 1972. ⁴ Ю. А. Березин, В. И. Карпман, ЖЭТФ, 46, 1880 (1964). ⁵ Л. Д. Фаддеев, Тр. Матем. инст. им. Стеклова АН СССР, 73, 314 (1964).