Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 1

УДК 513.88:517.948.35 *МАТЕМАТИКА*

Ю. Ш. АБРАМОВ

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 25 XII 1972)

1. В некоторых вопросах математической физики встречаются задачи на собственные значения, в которых параметр λ входит нелинейно (см. ([1-3])). Такие задачи можно свести к нелинейным задачам на собственные значения в некотором гильбертовом пространстве H([3, 4]): $L_\lambda x = 0$, $\lambda \in (c, d)$, где $L = L_\lambda$: $(c, d) \to S$ (S — класс ограниченных симметричных операторов) — непрерывно дифференцируемая функция (по норме операторов) на интервале $(c, d) \subset R$. Как впервые заметил Даффин ([5]), а за ним Роджерс ([6]), для собственных значений иногда удается установить вариационные принципы в терминах некоторого аналога функционала Рэлея (для классического случая $p(x) = (Ax, x) / (x, x)$, $A \in S_\infty$ — вполне непрерывные операторы из S).

Определение 1. Непрерывный функционал $p: H \setminus \{0\} \to (c, d)$ называется функционалом Рэлея для L_λ, если выполнены условия: 1) $p(\alpha x) = p(x)$, 2) $(L_{p(x)}x, x) = 0$, 3) $(L'_{p(x)}x, x) = 0$, $\alpha \in R$, $\alpha, x \neq 0$. Пару (L, p) назовем системой Рэлея (с. Р.). Если пара $\lambda, x \neq 0$, $\lambda \in W = p(H \setminus \{0\})$ удовлетворяет уравнению $L_\lambda x = 0$, то λ называется собственным значением, а x — соответствующим ему собственным элементом с. Р.

В заметке устанавливаются аналогии классических вариационных принципов и принцип Стенджера ([7]) и указываются достаточные условия существования собственных значений. Полученные теоремы обобщают некоторые результаты работ ([3, 6–13]).

2. Введем следующие множества точек:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \{\lambda \in \overline{W} : \exists \{x_n\} \in X, L_\lambda x_n \to 0\},\\
\pi_1 &= \{\lambda \in \overline{W} : \exists \{x_n\} \in X_0, L_\lambda x_n \to 0\},\\
\sigma_2 &= \{\lambda \in \overline{W} : \exists \{x_n\} \in X, L_\lambda x_n \to 0, p(x_n) \to \lambda\},\\
\pi_2 &= \{\lambda \in \overline{W} : \exists \{x_n\} \in X_0, L_\lambda x_n \to 0, p(x_n) \to \lambda\},
\end{aligned}$$

где X — множество последовательностей на сфере, а X_0 — последовательности из X, слабо сходящиеся к нулю.

Если $\gamma_d \equiv \sup p(x) = d$ ($\gamma_c \equiv \inf p(x) = c$), считаем, что d (соответственно c) принадлежит всем перечисленным выше множествам. Очевидно, что $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$, $\pi_2 \subseteq \pi_1$ и $\pi_i \subseteq \sigma_i$, $i = 1, 2$. Нетрудно видеть также, что все эти множества замкнуты, а в линейном случае совпадают со спектром и предельным спектром.

Введем обозначения: $\Delta[\alpha, \beta] = (\alpha - \beta)^{-1}(L_\alpha - L_\beta)$, $\alpha \neq \beta$, $\Delta[\alpha, \alpha] = L_\alpha'$; $[x, y] = (\Delta[p(x), p(y)]x, y)$, $x, y \neq 0$, $[x, y] = 0$, $\|x\| \cdot \|y\| = 0$; $[x, y]_\lambda = (\Delta[\lambda, p(y)]x, y)$, $y \neq 0$, $[x, 0] = 0$, $\alpha, \beta, \lambda \in (c, d)$.

Теорема 1. *Пусть $(\beta, \gamma_d] \cap \pi_1 = \varnothing$. Тогда $(\beta, \gamma_d] \cap \sigma_1 \neq \varnothing$ и состоит из изолированных собственных значений конечной кратности $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant \ldots$ ($\lambda_1 = \gamma_d$), которым соответствует такая последовательность линейно-независимых собственных элементов $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, что*

$$\max_{[x, x_i]=0,\ i=1,\ldots,n-1} p(x) = \lambda_n, \quad [x_i, x_j] = \delta_{ij}, \tag{1}$$

причем максимум достигается на элементе x_n.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ — *собственные значения,* $[\lambda_n, \lambda_1] \cap \cap \pi_1 = \phi$ *и* $x_1, \ldots, x_n$ — *линейно-независимые собственные элементы, им соответствующие. Если* $x \neq 0$, $[x, x_i] = 0$, $i = 1, \ldots, n$, *то* $p(x) < \lambda_n$, $[p(x), \lambda_n) \cap \sigma_1 \neq \phi$.

Положим $N_p(\lambda) = \sup\{\dim E : p(x) > \lambda,\ x \in E\}$, где E — подпространства H и $\lambda < \gamma_d$; $\gamma_d^{(\pi_1)} = \max\{\lambda : \lambda \in \pi_1\}$.

Аналогом известного для линейного случая результата является

Теорема 3. *Если* $\gamma_d^{(\pi_1)} \geqslant \lambda < \gamma_d$, *то интервал* $(\lambda, \gamma_d]$ *содержит точно* $N_p(\lambda)$ *собственных значений.*

Следствие 1. *Пусть* $\gamma_c \notin W$ *и* $\pi_1 = \{\gamma_c\}$. *Тогда существует счетное множество собственных значений конечной кратности с единственной предельной точкой* γ_c.

Следующая теорема также служит аналогом принципа Рэлея (ср. с теоремой 1).

Теорема 4. *Пусть* $(\beta, \gamma_d] \cap \pi_2 = \phi$. *Тогда* $(\beta, \gamma_d] \cap \sigma_2 \neq \phi$ *и состоит из изолированных собственных значений конечной кратности* $\lambda_1 \geqslant \ldots \lambda_n \geqslant \geqslant \ldots$ $(\lambda = \gamma_d)$, *которым соответствует такая последовательность линейно-независимых собственных элементов* $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, что

$$\max_{[x, x_i]_{\lambda_n} = 0,\ i = 1, \ldots, n-1} p(x) = \lambda_n, \tag{2}$$

причем максимум достигается на элементе x_n.

Следующее утверждение есть аналог принципа Фишера — Куранта — Вейля.

Теорема 5. *При условиях теоремы 1 или 4 выполнены принципы 1) или 2) соответственно:*

$$1)\ \min_{y_1, \ldots, y_{n-1}} \sup_{[x, y_i] = 0,\ i = 1, \ldots, n-1} p(x) = \lambda_n, \quad 2)\ \min_{E \in \mathscr{E}^{n-1}} \max_{E} p(x) = \lambda_n, \tag{3}$$

где $\mathscr{E}^n$ — *совокупность подпространств коразмерности* n в H.

Следующее утверждение является аналогом принципа Пуанкаре — Ритца.

Теорема 6. *При условиях теоремы 4*

$$\max_{E \in \mathscr{E}_n} \min_{E} p(x) = \lambda_n, \tag{4}$$

где $\mathscr{E}_n$ — *совокупность подпространств* H *размерности* n.

Если подпространство $E \subset H$, то на E индуцируется с.Р. (PL, p), где P — проектор на E. Пусть $\lambda_1(E) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(E) \geqslant$ — ее собственные значения.

Следствие 2. *Если* $E_2 \subseteq E_1$ *и* $n \leqslant \dim E_2$, *то* $\lambda_n(E_2) \leqslant \lambda_n(E_1)$.

Аналогом теоремы разделения Коши — Пуанкаре ([14]) является

Теорема 7. *Если* $E \in \mathscr{E}^i$, то $\lambda_{n+i} \leqslant \lambda_n^i \leqslant \lambda_n$, *где*

$$\lambda_n^i = \lambda_n(E), \quad i = 1, 2, \ldots$$

В ([7]) Стенджер нашел новый вариационный принцип для линейного случая. Его аналогом является

Теорема 8. *Пусть* $n = 1, 2, \ldots$; $i = 0, 1, \ldots$, *тогда*

$$\min_{E \in \mathscr{E}^i} \max_{F \in \mathscr{E}_n(E)} \min_{F} p(x) = \lambda_{n+i}$$

Теоремы 5,2) и 6 являются частными случаями теоремы 8. Так, теорема 5,2) получается при $n = 1$, а теорема 6 при $i = 0$.

Следующее утверждение служит аналогом теоремы отделения Штурма ([14]).

Теорема 9. $\lambda_{n+1}^{i-1} \leqslant \lambda_n^i \leqslant \lambda_n^{i-1}$, т. е. *собственные значения «перемежаются»* $\lambda_1^{i-1} \geqslant \lambda_1^i \geqslant \lambda_2^{i-1} \geqslant \lambda_2^i \geqslant \lambda_3^{i-1} \geqslant \ldots$

3. Определение 2. Система Рэлея (L, p) называется выпуклой (вогнутой) на интервале Λ, если $W \subseteq \Lambda \subseteq (c, d)$ и $L_\lambda'' \geqslant 0$ $(L_\lambda'' \leqslant 0)$, $\lambda \in \Lambda$.

Для определенности будем считать, что с.Р. (L, p) выпукла на Λ.

Допустим, что выполнено условие

$$(L_\lambda' x, x) > 0, \quad x \neq 0, \quad \lambda \in \Lambda,$$

являющееся некоторым усилением условия 3) в определении 1.

С системой Рэлея (L, p) свяжем линейные с.Р. $(L^{(\alpha)}, p_\alpha)$, где

$$L_\lambda^{(\alpha)} = \lambda L_\alpha' - (\alpha L_\alpha' - L_\alpha), \quad p_\alpha(x) = \alpha - (L_\alpha x, x)/(L_\alpha' x, x). \qquad (5)$$

Используя идею квазилинеаризации Р. Беллмана [15], можно получить следующее представление для функционала p:

$$p(x) = \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x). \qquad (6$$

Для вогнутых и выпуклых с.Р., используя представление (6) (для вогнутых в (6) — знак max), можно переформулировать все вариационные принципы. Интересно то, что в такой формулировке функционал Рэлея не участвует, а все выражено через функцию L_λ и ее производную L_λ' (см. [5]).

4. Выведем некоторые следствия из наших результатов.

а) В работе [6] Роджерс показал, что в случае $\dim H < \infty$ существует базис из собственных векторов, а для собственных значений справедливы принципы Фишера — Куранта — Вейля и Пуанкаре — Ритца. В [13] Хаделер доказал принцип Рэлея (теорема 1). Так как в этом случае $\pi_1 = \pi_2 = \phi$, то указанные результаты следуют из наших теорем 1, 3, 5, 6.

б) Пусть (L, p) — с.Р. с функцией $L_\lambda = r(\lambda) B_\lambda - A_\lambda$, $\lambda \in (c, d)$, где $r(\lambda) \in C(c, d)$, B_λ, $A_\lambda : (c, d) \to S$ — непрерывные операторозначные функции, причем $(B_\lambda x, x) \geqslant k\|x\|^2$, $k > 0$, $A_\lambda \in S_\infty$ для $\lambda \in W$. Считая, что $r(c) = r(d) = 0$, положим $\Lambda_r = \{\lambda \in \overline{W} : r(\lambda) = 0\}$. Можно показать, что $\pi_1 = \Lambda_r$, а для собственных значений из $(\beta, \gamma_d]$ справедливы все вариационные принципы п. 2 с $\beta = \max\{\lambda : \lambda \in \Lambda_r\}$.

в) Хаделер [10] рассмотрел с.Р. с функцией $L_\lambda = r(\lambda) I - A_\lambda$, где $r(\lambda)$ и A_λ удовлетворяют условиям б). Он установил справедливость (1), $(3)_{2)}$ и (4). Его результаты следуют из б) при $B_\lambda = I$.

г) Тернер [8] рассмотрел с.Р. с функцией

$$L_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i B_i - A, \quad \lambda \in (-\infty, \infty),$$

где $B_1 = I$, $B_i \in S$, $A \in S_\infty$, $B_i \geqslant 0$, $i = 2, \ldots, n$, $A > 0$, а $p(x)$ есть единственное решение уравнения $(L_\lambda x, x) = 0$, $\lambda > 0$. В [8] при некоторых ограничениях установлены также принципы, аналогичные [10]. В этом случае

$$B_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1} B_i, \quad A_\lambda = A, \quad r(\lambda) = \lambda$$

(см. б)), и поэтому, $\pi_1 = \pi_2 = \{0\}$. Система Рэлея выпукла, существует счетное множество собственных значений (следствие 1) и верны все вариационные принципы.

д) Кюне [11] для сильно демпфированного квадратичного пучка $L_\lambda = \lambda^2 A + \lambda B + C$ доказал принципы (2) и $(3)_{2)}$. В этом случае справедливы все принципы п. 2.

е) Лангер ([12]) для пучка д) при некоторых ограничениях доказал существование собственных значений и установил для них справедливость принципа $(3)_2$). Его результаты следуют из теорем 3 и 5. Кроме того, справедливы все принципы п. 2.

Ленинградский финансово-экономический институт
им. Н. А. Вознесенского

Поступило
21 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Коллатц, Задачи на собственные значения, М., 1968. [2] Д. Ф. Харазов, Матем. сборн., 42, 2, 129 (1957). [3] R. E. L. Turner, J. Math. Anal. and Appl., 17, 151 (1967). [4] С. Г. Крейн, ДАН, 159, № 2 (1964). [5] R. J. Duffin, J. Rat. Mech. Anal., 4, 221 (1955). [6] E. H. Rogers, Arch. Rat. Mech. Anal., 16, 89 (1964). [7] W. Stenger, J. Math. Mech., 17, 931 (1968). [8] R. E. L. Turner, J. Func. Anal., 7, 297 (1968). [9] E. H. Rogers, J. Math. Mech., 18, 479 (1968). [10] K. P. Hadeler, Arch. Rat. Mech. Anal., 30, 297 (1968). [11] R. Kühne, Acta Sci. Math. Szeged., 29, № 1—2, 39 (1968). [12] H. Langer, J. Math. Mech., 17, 685 (1968). [13] K. P. Hadeler, Arch. Rat. Mech. Anal., 27, 306 (1967). [14] Р. Беллман, Введение в теорию матриц, М., 1969. [15] Р. Беллман, Р. Калаба, Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, М., 1968.