

УДК 517.43+513.881

МАТЕМАТИКА

С. Г. КРЕЙН, С. Я. ЛЬВИН

ОБЩАЯ НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 XI 1972)

1°. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(d/dt)u = 0, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (1)$$

где $u(t)$ — искомая функция со значениями в банаховом пространстве E , а $L(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i L_i$ — полином, коэффициенты которого являются ограниченными операторами в E .

Для уравнения (1) ставится задача о нахождении решения, удовлетворяющего начальному условию вида

$$S(d/dt)u|_{t=0} = \psi, \quad (2)$$

где ψ — заданный элемент банахова пространства F , а $S(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda^i S_i$ — полином с ограниченными операторными коэффициентами, действующими из пространства E в пространство F .

Основное предположение состоит в том, что при достаточно больших $|\lambda|$ оператор $L(\lambda)$ имеет ограниченный обратный оператор $L(\lambda)^{-1}$, причем справедливо сходящееся разложение

$$L(\lambda)^{-1} = \sum_{i=-\infty}^l \lambda^i D_i, \quad (3)$$

где D_i — ограниченные операторы в пространстве E . Заметим, что разложение (3) заведомо будет иметь место, если оператор L_m , стоящий при наивысшей степени λ^m в полиноме $L(\lambda)$, имеет ограниченный обратный.

Определение 1. Функционал $f \in F^*$ называется **стирающим** для задачи (1), (2), если при всяком $x \in E$ функция $f(S(\lambda)L(\lambda)^{-1}x)$ совпадает в области $\mathfrak{A}$ аналитичности функции $L(\lambda)^{-1}$ с некоторой целой функцией.

Из разложения (3) видно, что для стирающего функционала функция $f(S(\lambda)L(\lambda)^{-1}x)$ будет полиномом.

Теорема 1. Для того чтобы задача (1), (2) при заданном ψ была разрешимой, необходимо, чтобы выполнялись условия $f(\psi) = 0$ для всех стирающих функционалов задачи (1), (2).

Для того чтобы задача (1), (2) была разрешимой для плотного в пространстве F множества правых частей ψ , необходимо и достаточно, чтобы единственным стирающим функционалом задачи (1), (2) был нулевой функционал.

Следствие. Если выполнены условия: 1) $\|S(\lambda)L(\lambda)^{-1}\| \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ и 2) объединение областей значений операторов $S(\lambda)$ при $\lambda \in \mathfrak{A}$ плотно в F , то задача (1), (2) разрешима для плотного в пространстве F множества правых частей ψ .

Нетрудно проверить, что в конечномерном случае условие отсутствия ненулевых стирающих функционалов эквивалентно так называемым усло-

виям дополнителъности (для убывающихъ решений см., например, (1)). В этомъ случаѣ они естественно являются условиями того, что задача (1), (2) разрешима при любой правой части из F .

Опишемъ основные этапы доказательства теоремы 1.

Сначала рассматривается простейшее дифференціальное уравнение

$$A \, du / dt = u, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (4)$$

в предположении, что при достаточно больших $|\lambda|$ имеетъ место разложение

$$(\lambda A - I)^{-1} = \sum_{-\infty}^{k-1} \lambda^i A_i, \quad (5)$$

где A_i — ограниченные в пространстве E операторы. Условие (5) эквивалентно тому, что резольвента оператора A имеетъ в нуле полюсъ порядка k . В этомъ случаѣ (см. (2)) все пространство E разлагается в прямую сумму $E = N + M$ инвариантныхъ относительно оператора A подпространствъ N и M , причемъ $A^k = 0$ на подпространствѣ N , а на подпространствѣ M оператор A имеетъ ограниченный обратный. Обозначимъ черезъ P и Q проекторы, отвечающие разложению $E = N + M$.

Уравнение (4) при описанныхъ выше условияхъ на оператор A исследовалось в (3). Тамъ было показано, что все решения уравнения лежатъ в подпространствѣ M и могутъ быть представлены в видѣ

$$u(t) = e^{Ct} u_0, \quad (6)$$

где $u_0 \in M$, оператор $C = (AQ + P)^{-1}$. Подставляя это общее решение в условие (2), мы приходимъ к уравнению

$$S(C) Q u_0 = \sum_{i=0}^n S_i C^i u_0 = \psi \quad (7)$$

для начальнаго значенія u_0 искомага решения задачи (4), (2).

Оператор, стоящій слева в (7), можно представить в видѣ

$$S(C) Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} S(\lambda) (\lambda A - I)^{-1} A Q \, d\lambda, \quad (8)$$

где Γ — контур, окружающій спектр оператора $(\lambda A - I)^{-1}$. В подпространствѣ N функция $(\lambda A - I)^{-1}$ является полиномомъ, поэтому интегралъ, аналогичный (8), в которомъ проекторъ Q замененъ на P , равенъ нулю. Значитъ,

$$S(C) Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} S(\lambda) (\lambda A - I)^{-1} A \, d\lambda. \quad (9)$$

Если функционалъ $f \in F^*$ является стирающимъ для задачи (4), (2), то функция $f(S(\lambda) (\lambda A - I)^{-1} A x)$ допускаетъ голоморфное внутри Γ расширение и поэтому, в силу (9), $f(S(C) Q u_0) = 0$ при любомъ u_0 , т. е. функционалъ f ортогоналенъ к области значеній операторъ $S(C) Q$.

Обратно, пусть функционалъ $f \in F^*$ ортогоналенъ к области значеній операторъ $S(C) Q$. Воспользуемся тождествомъ Безу

$$S(\lambda) = B(\lambda) (\lambda I - C) + S(C),$$

где $B(\lambda)$ — полиномъ степени $n - 1$ с операторными коэффициентами.

Применяя справа оператор $(\lambda I - C)^{-1} Q$, получаемъ

$$S(\lambda) (\lambda A - I)^{-1} A Q x = B(\lambda) Q x + S(C) Q (\lambda A - I)^{-1} A x, \quad x \in E.$$

По условию, функционалъ f обращается в нуль на второмъ слагаемомъ справа, поэтому $f(S(\lambda) (\lambda A - I)^{-1} A Q x)$ в точкахъ регулярности $(\lambda A - I)^{-1}$ совпадаетъ с полиномомъ $f(B(\lambda) Q x)$. Элементъ $A Q x$ пробегаетъ все подпро-

пространство M , поэтому $f(S(\lambda)(\lambda A - I)^{-1}y)$ — полином при любом $y \in M$. При $z \in N$ сама функция $S(\lambda)(\lambda A - I)^{-1}z$ является полиномом, следовательно, $f(S(\lambda)(\lambda A - I)^{-1}x)$ — полином при любом $x \in E$ и функционал f стирающий.

Итак, теорема 1 доказана для уравнения (4). Переход от уравнения m -го порядка к уравнению первого порядка делается с помощью обычных замен. Рассматриваются пространство $G = E^m$, действующие в G опера-

$$A(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) = (x_0, x_1, \dots, x_{m-2}, L_m x_{m-1}),$$

$$B(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) = \left(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \sum_{i=0}^{m-1} L_i x_i \right)$$

и полином $T(\lambda)$ с ограниченными операторными коэффициентами, действующими из G в F , определенный равенством

$$T(\lambda)(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) = S_0 x_0 + S_1 x_1 + \dots + S_{m-2} x_{m-2} + \left(\sum_{i=m-1}^n \lambda^{i-m+1} S_i \right) x_{m-1}$$

Тогда задача (1), (2) в пространстве E эквивалентна задаче в пространстве G , определяемой уравнением

$$A \, dv/dt = Bv, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (10)$$

начальным условием

$$T(d/dt)v|_{t=0} = \psi. \quad (11)$$

При этом $v(t) = (u(t), du(t)/dt, \dots, d^{m-1}u(t)/dt^{m-1})$

Из разложения (3) следует разложение

$$(\lambda A - B)^{-1} = \sum_{i=-\infty}^{k-1} \lambda^i Q_i, \quad k = l + m, \quad |\lambda| > c,$$

где Q_i — ограниченные операторы в G . Кроме того, область аналитичности функции $(\lambda A - B)^{-1}$ совпадает с областью $\mathfrak{A}$ аналитичности $L(\lambda)^{-1}$. При достаточно большом $|\lambda_0|$ существует обратный к оператору $B_0 = B - \lambda_0 A$. Тогда замена $v = e^{\lambda_0 t} w$ приводит задачу (10), (11) к виду

$$B_0^{-1} A \, dw/dt = w, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (12)$$

$$T(d/dt + \lambda_0)w|_{t=0} = \psi. \quad (13)$$

Для оператора $B_0^{-1}A$ справедливо разложение

$$(\lambda B_0^{-1}A - I)^{-1} = \sum_{i=-\infty}^{k-1} \lambda^i H_i, \quad |\lambda| > c_1,$$

где операторы H_i являются линейными комбинациями операторов $Q_i B_0$.

Таким образом, мы свели задачу (1), (2) к ее простейшему частному виду.

Для доказательства теоремы 1 остается лишь проверить, что стирающие функционалы задачи (12), (13) совпадают со стирающими функционалами задачи (1), (2). Эта проверка здесь опускается.

2°. Рассмотрим теперь задачу (1), (2) с дополнительным условием на бесконечности

$$\|u(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Определение. 2. Функционал $f \in F^*$ называется стирающим для задачи (1), (2), (14), если при любом $x \in E$ функция $f(S(\lambda)L(\lambda)^{-1}x)$ совпадает с некоторой аналитической в левой полуплоско-

сти функцией на пересечении $\mathcal{A}$ -области аналитичности функции $L(\lambda)^{-1}$ с левой полуплоскостью $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Теорема 2. Пусть оператор $L(\lambda)^{-1}$ ограничен во всех точках мнимой оси и при достаточно больших $|\lambda|$ для него справедливо разложение (3). Для того чтобы задача (1), (2), (14) была разрешимой при заданном $\psi \in F$, необходимо выполнение условий $f(\psi) = 0$ для всех стирающих функционалов задачи (1), (2), (14).

Для того чтобы задача (1), (2), (14) была разрешимой для плотного в F множества правых частей ψ , необходимо и достаточно, чтобы не было ненулевых стирающих функционалов задачи (1), (2), (14).

Замечание. Теоремы 1 и 2 справедливы и в том случае, когда функция $S(\lambda)$ является целой функцией с ограниченными операторными коэффициентами. Это позволяет получить аналоги теорем 1 и 2 с многоточечными граничными условиями.

3°. Рассмотрим уравнение (1) с начальным условием Коши

$$d^k u / dt^k|_{t=0} = u_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (15)$$

Теорема 3. Если $L(\lambda)^{-1}$ — мероморфная функция и справедливо разложение (3), то для разрешимости задачи Коши (1), (15) для плотного в E^m множества наборов правых частей необходимо и достаточно, чтобы система собственных и присоединенных элементов операторного пучка $I - L(\lambda)$ была m -кратно полна в E (см. (5, 6)).

4°. Пусть $L(\lambda)^{-1}$ по-прежнему обладает разложением (3) и $\Phi(t)$ — функция со значениями в E . Рассмотрение неоднородного уравнения

$$L(d/dt)u = \Phi(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (16)$$

приводит к исследованию уравнения первого порядка

$$A dv / dt = v + \Phi_1(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (17)$$

в некотором банаховом пространстве N , в котором $A^k = 0$. Можно увидеть, что решение уравнения (17) существует и дается формулой

$$-v = \Phi_1 + \frac{d}{dt} \left(A\Phi_1 + \frac{d}{dt} \left(A^2\Phi_1 + \dots + \frac{d}{dt} (A^{k-1}\Phi_1) \right) \dots \right), \quad (18)$$

если все входящие в формулу (18) производные имеют смысл и полученная функция v дифференцируема. В противном случае решение уравнения (17) не существует. Учитывая это, для задачи (16), (2) можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть задача (1), (2) разрешима для плотного в F множества правых частей ψ . Тогда, если функция $\Phi(t)$ n_1 раз непрерывно дифференцируема, где $n_1 = \max \{m+l, n\}$, то задача (16), (2) также разрешима для плотного в F множества правых частей ψ .

Воропежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
26 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Солонников, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова, 33, 1 (1965).
² К. Иосида, Функциональный анализ, М., 1967. ³ С. Г. Крейн, В. Б. Осинов, Дифференциальные уравнения, 6, № 11, 2053 (1970). ⁴ В. П. Трофимов, Матем. иссл., 3, 117 (1968). ⁵ М. В. Келдыш, УМН, 26, № 4, 15 (1971). ⁶ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965.