

С. М. КРАСНИТСКИЙ

ОБ УСЛОВИЯХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР,
СООТВЕТСТВУЮЩИХ ГАУССОВСКИМ ПОЛЯМ, ОТЛИЧАЮЩИМСЯ
КОРРЕЛЯЦИОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 21 IX 1972)

Пусть $t = (t_1, \dots, t_n) \in T$, T — ограниченное подмножество R^n , R^n — n -мерное евклидово пространство, $\xi_k(t)$, $k = 1, 2$, — действительные однородные гауссовские поля на T , $M\xi_k(t) = 0$, $M\xi_k(t)\xi_k(s) = R_k(t-s)$, μ_k — меры, соответствующие $\xi_k(t)$, $k = 1, 2$. Будем считать, что случайные поля $\xi_k(t)$ обладают спектральными плотностями $f_k(\alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$, так что для функции $R(t, s) = R_2(t-s) - R_1(t-s)$ справедливо представление

$$R(t, s) = \int_{R^n} e^{i\langle \alpha, t-s \rangle} [f_2(\alpha) - f_1(\alpha)] d\alpha, \quad (1)$$

где $\langle \alpha, \tau \rangle = \alpha_1 \tau_1 + \dots + \alpha_n \tau_n$.

В (1, 3) содержатся основные результаты, связанные с вопросом об эквивалентности μ_1 и μ_2 в случае гауссовских стационарных процессов (т. е. при $n = 1$). В работе (2) имеются условия эквивалентности в случае произвольного n . В настоящей работе также рассматриваются меры μ_1 и μ_2 , соответствующие случайным полям, однако приводимые здесь условия эквивалентности и ограничения на спектральные плотности $f_k(\alpha)$, при которых эти условия справедливы, вообще говоря, отличаются от предложенных в (2). В частности, полученные результаты могут применяться к исследованию абсолютной непрерывности μ_1 и μ_2 в случае некоторых типов дробно-рациональных спектральных плотностей. Один из вариантов такого применения представлен в теореме 3 настоящей работы.

Приводимое ниже утверждение (теорема 1) близко к одному результату З. С. Зеракидзе (2) (при $n = 1$ принадлежащему Ю. А. Розанову).

Будем называть обобщенными преобразованиями Фурье преобразования Фурье обычных функций, рассматриваемых как обобщенные в смысле Шварца.

Теорема 1. Для эквивалентности μ_1 и μ_2 необходимо и достаточно, чтобы функция $R(t, s)$, $(t, s) \in T \times T$, допускала такое продолжение на всё пространство $R^n \times R^n$, обобщенное преобразование Фурье которого $b(\alpha, \beta)$ является обычной функцией, такой что

$$\iint_{R^n \times R^n} \frac{|b(\alpha, \beta)|^2}{f_1(\alpha) f_1(\beta)} d\alpha d\beta < +\infty.$$

Определение 1. Пусть $X \subset R^n$, $l = (l_1, \dots, l_n)$ — вектор с положительными целочисленными координатами, $a(x)$, $x \in X$, — некоторая функция. Будем говорить, что $a(x)$ принадлежит $L_2^l(X)$, если является конечной величина

$$\|a\|_{L_2^l(X)} = \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^{l_j} a}{\partial x_j^{l_j}} \right\|_{L_2(X)},$$

где

$$\|a\|_{L_2(X)} = \left[\int_X |a(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Если же конечна величина

$$\|a\|_{W_2^l(X)} = \|a\|_{L_2^l(X)} + \|a\|_{L_2(X)},$$

то будем говорить, что $a(x)$ принадлежит $W_2^l(X)$.

Пусть $\tau = t - s \in \Delta$; $t, s \in T$. Из теоремы 1 и равенства (1) следует

Теорема 2. Пусть

$$f_1(\alpha) \cdot f_1(\beta) \cdot \sum_{j=1}^n [(1 + \alpha_j^2)^{l_j} + (1 + \beta_j^2)^{l_j}] \geq c = \text{const} > 0,$$

где l_j , $j = 1, \dots, n$, — положительные целые. Если функция $R(\tau)$, $\tau \in \Delta$, принадлежит классу $L_2^l(\Delta)$ при $l = (l_1, \dots, l_n)$, а множество $T \times T$ удовлетворяет условиям продолжения с сохранением класса $W_2^z(T \times T)$ (см. (4), стр. 194, 445) при $z = (l_1, \dots, l_n, l_1, \dots, l_n)$, то μ_1 и μ_2 эквивалентны.

Следствие. Пусть для достаточно больших $|\alpha|$

$$f_1(\alpha) \cdot (1 + |\alpha|^2)^m \geq c = \text{const} > 0,$$

где m — положительное целое, $|\alpha| = (\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2)^{1/2}$.

Тогда, если $R(\tau) \in L_2^l(\Delta)$ при $l = (l_1, \dots, l_n)$, $l_j = 2m$, $j = 1, \dots, n$, а множество $T \times T$ удовлетворяет условиям продолжения с сохранением класса $W_2^z(T \times T)$ при $z = (l_1, \dots, l_n, l_1, \dots, l_n)$, то μ_1 и μ_2 эквивалентны.

Определение 2. Многочлен $P(\alpha) = P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ от переменных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называется эллиптическим, если его главная часть отлична от нуля при $0 \neq \alpha \in R^n$.

Используя следствие теоремы 2 и одно неравенство для эллиптических многочленов (см. (5), стр. 106), получим, что справедлива

Теорема 3. Пусть $f_1(\alpha) = P(\alpha) / Q(\alpha)$, где $P(\alpha)$ — неотрицательный эллиптический многочлен степени $2p$, $Q(\alpha)$ — положительный многочлен степени $2q$. Если $R(\tau) \in L_2^l(\Delta)$ при $l = (l_1, \dots, l_n)$, $l_j = 2(q - p)$, $j = 1, \dots, n$, а $T \times T$ удовлетворяет условиям продолжения с сохранением класса $W_2^z(T \times T)$ при $z = (l_1, \dots, l_n, l_1, \dots, l_n)$, то меры μ_1 и μ_2 эквивалентны.

Если предположить, что $Q(\alpha)$ также является эллиптическим многочленом, то имеет место

Теорема 4. Пусть T — любое ограниченное множество в R^n . При выполнении условия

$$\int_{R^n} \left[\frac{f_2(\alpha) - f_1(\alpha)}{f_1(\alpha)} \right]^2 d\alpha < +\infty \quad (2)$$

меры μ_1 и μ_2 эквивалентны.

Замечание. Пользуясь условием (2), можно показать, что условие $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} f_2(\alpha) / f_1(\alpha) = 1$, как известно, необходимое (и достаточное) для эквивалентности μ_1 и μ_2 в случае дробно-рациональных спектральных плотностей при $n = 1$, не является необходимым при $n \geq 2$.

Киевский институт

инженеров гражданской авиации

Поступило

17 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Гихман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов, М., 1971.
- ² З. С. Зеракидзе, Тр. Инст. прикл. матем. Тбилиск. унив., 2, 215 (1969).
- ³ И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, Гауссовские случайные процессы, М., 1970.
- ⁴ С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.
- ⁵ Л. Хермандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965.