Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 3

УДК 513.83 МАТЕМАТИКА

А. П. КОМБАРОВ

О НОРМАЛЬНОСТИ $\Sigma_{\mathfrak{m}}$-ПРОИЗВЕДЕНИЙ

(Представлено акдемиком П. С. Александровым 21 XI 1972)

В произведении пространств $X=\Pi\{X_\alpha\colon \alpha\in A\}$ выберем точку $s=\{s_\alpha\}$. Для каждой точки x произведения X определено множество индексов $Q(x)=\{\alpha\in A\colon x_\alpha\neq s_\alpha\}$. Пусть $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число. $\Sigma_{\mathfrak{m}}$-произведение пространств X_α, $\alpha\in A$, определяется как подпространство $\Sigma_{\mathfrak{m}}=\{x\in X\colon Q(x)\mid\leqslant\mathfrak{m}\}$ произведения X. В ([1], [2]) доказано, что $\Sigma_{\aleph_0}$-произведение полных в смысле Чеха паракомпактов, теснота каждого из которых счетна, коллективно нормально. Если $\mathfrak{m}>\aleph_0$ и среди паракомпактов X_α, $\alpha\in A$, несчетное число небикомпактных, то $\Sigma_{\mathfrak{m}}$-произведение паракомпактов X_α, $\alpha\in A$, ненормально, поскольку в этом случае $\Sigma_{\mathfrak{m}}$-произведение содержит в качестве замкнутого подмножества произведение несчетного числа бесконечных дискретных пространств, которое, как известно ([3]), не является нормальным пространством.

Теорема 1. *$\Sigma_{\mathfrak{m}}$-произведение бикомпактов, теснота каждого из которых не превосходит $\mathfrak{m}$, нормально.*

Замечание. Пусть $|A|=\mathfrak{n}>\mathfrak{m}$, $D^{\mathfrak{n}}$ — обобщенный канторов дисконтинуум веса $\mathfrak{n}$, а D_α, $\alpha\in A$,— дискретные двоеточия. Как и в ([1]), нетрудно убедиться, что $\Sigma_{\mathfrak{m}}$ -произведение бикомпактов $D^{\mathfrak{n}}$ и D_α, $\alpha\in A$, ненормально.

Система множеств $h=\{H_t\colon t\in T\}$ разделяется в открытом множестве Γ, если найдется дизъюнктная система открытых множеств $\{U_t\colon t\in T\}$ такая, что $H_t\cap\Gamma\subseteq U_t$ для любого $t\in T$ ([4]).

Лемма 1. *Пусть p — непрерывное отображение пространства Z на паракомпакт Y, множества Γ_λ, $\lambda\in\Lambda$, открыты в Y, а система $h=\{H_t\subseteq Z\colon t\in T\}$ разделяется в $p^{-1}(\Gamma_\lambda)$ при каждом $\lambda\in\Lambda$.*

Тогда для любого замкнутого множества $F\subseteq\cup\{\Gamma_\lambda\colon\lambda\in\Lambda\}$ найдется открытое множество $U\supseteq F$ такое, что система h разделяется в $p^{-1}(U)$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что существует локально-конечная система открытых множеств $\{V_\xi\colon\xi\in\Xi\}$ такая, что $F\subseteq\cup\{V_\xi\colon\xi\in\Xi\}$, а система замкнутых множеств $\{[V_\xi]\colon\xi\in\Xi\}$ вписана в $\{\Gamma_\lambda\colon\lambda\in\Lambda\}$. Пусть $U=\cup\{V_\xi\colon\xi\in\Xi\}$. Далее непосредственно обобщаются построения из доказательства леммы 1 из ([1]).

В доказательстве теоремы 1 система h состоит из двух множеств, а p является проекцией произведения на сомножитель.

Доказательство теоремы 1. Пусть теснота каждого из бикомпактов X_α, $\alpha\in A$, не превосходит $\mathfrak{m}$. Предположим, что множества H_1 и H_2 не разделяются в $\Sigma_{\mathfrak{m}}\subseteq X=\Pi\{X_\alpha\colon\alpha\in A\}$. Ясно, что H_1 и H_2 не разделяются и в X. Возьмем $B_0\subseteq A$ так, чтобы $|B_0|\leqslant\mathfrak{m}$, и определим $X_0=\Pi\{X_\alpha\colon\alpha\in B_0\}$. Через p_0 обозначим проекцию X на X_0. Бикомпакт X_0 не допускает покрытия открытыми множествами, в полных прообразах которых при отображении p_0 множества H_1 и H_2 разделяются (([4]), замечание к лемме 1). Поэтому найдется точка $x_0\in X_0$ такая, что для любого открытого множества V, содержащего эту точку, множества H_1 и H_2 не разделяются в $p_0^{-1}(V)$.

Предположим теперь, что для каждого натурального числа $i<j$ определено множество $B_i\subseteq A$ такое, что $|B_i|\leqslant\mathfrak{m}$ и, если $k<i$, то $B_k\subseteq B_i$.

Таким образом определена проекция p_k^i произведения $X_i = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in B_i\}$ на X_k. Через p_i обозначим проекцию X на X_i. Пусть далее для всех $i < j$ в X_i выбрана точка x_i такая, что если $x_i \in V \subseteq X_i$ и V открыто, то множества H_1 и H_2 не разделяются в $p_i^{-1}(V)$. Предположим также, что $p_k^i(x_i) = x_k$ при $k < i$.

Построим множество B_j и в произведении $X_j = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in B_j\}$ определим точку x_j с требуемыми свойствами. Пусть $j = i + 1$. Нетрудно заметить, что $x_i \in [p_i(H_1)] \cap [p_i(H_2)]$. Теснота бикомпакта X_i не превосходит $\mathfrak{m}$ ([5], теорема 4, замечание 3), поэтому $x_i \in [p_i(M_i)] \cap [p_i(N_i)]$, где $M_i \subseteq H_1$, $N_i \subseteq H_2$ и $|M_i| \leqslant \mathfrak{m}$, $|N_i| \leqslant \mathfrak{m}$. Пусть $B_j = B_i \cup \cup \{Q(x)\colon x \in M_i \cup \cup N_i\}$. Ясно, что $|B_j| \leqslant \mathfrak{m}$. Проекция p_i^j замкнута, т. е. для любого открытого множества $U \supseteq (p_i^j)^{-1}(x_i)$ найдется окрестность V точки x_i, для которой $(p_i^j)^{-1}(V) \subseteq U$. Множества H_1 и H_2 не разделяются в $p_i^{-1}(V) = p_j^{-1}((p_i^j)^{-1}(V))$, поэтому H_1 и H_2 не разделяются в $p_j^{-1}(U)$. Но тогда из леммы 1 следует, что найдется точка $x_j \in (p_i^j)^{-1}(x_i)$ такая, что если $x_j \in V \subseteq X_j$ и V открыто, то множества H_1 и H_2 не разделяются в $p_j^{-1}(V)$.

Пусть $B = \cup\{B_j : j = 1, 2, 3, \ldots,\}$. Очевидно $|B| \leqslant \mathfrak{m}$. Определим точку $y \in \Sigma_\mathfrak{m}$ условиями: $p_j(y) = x_j$ при $j = 1, 2, 3, \ldots$ и $y_\alpha = s_\alpha$ при $\alpha \in A \setminus B$. Произвольная окрестность точки y содержит окрестность вида

$$U = p_j^{-1}(V) \cap \cap \{\pi_\alpha^{-1}(O^\alpha) : \alpha \in K\},$$

где множество V открыто в X_j и содержит точку x_j, K является конечным подмножеством $A \setminus B$, множество O^α открыто в X_α и содержит точку s_α, а π_α – проекция X на X_α при $\alpha \in K$. Заметим, что $x_j \in [p_j(M_j)] \cap [p_j(N_j)]$, и выберем $z' \in M_j$ и $z'' \in N_j$ так, чтобы $p_j(z') \in V$ и $p_j(z'') \in V$. Легко видеть, что $z_\alpha' = z_\alpha'' = s_\alpha$ при $\alpha \in A \setminus B$. Поэтому точки z' и z'' лежат в U, т. е. произвольно выбранная окрестность точки y пересекается и с H_1, и с H_2. Следовательно, H_1 и H_2 не могут быть непересекающимися замкнутыми подмножествами $\Sigma_\mathfrak{m}$. Теорема доказана

Т е о р е м а 2. *$\Sigma_\mathfrak{m}$-произведение бикомпактов тесноты $\leqslant \mathfrak{m}$ и не более чем счетного числа перистых паракомпактов тесноты $\leqslant \mathfrak{m}$ коллективно нормально.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что такое $\Sigma_\mathfrak{m}$-произведение совпадает с произведением $X \times Y$, где X – произведение не более чем счетного числа перистых паракомпактов тесноты $\leqslant \mathfrak{m}$, а Y является $\Sigma_\mathfrak{m}$-произведением бикомпактов тесноты $\leqslant \mathfrak{m}$. Произведение паракомпакта, теснота которого не превосходит $\mathfrak{m}$, и нормального сильно $\mathfrak{m}$-компактного пространства коллективно нормально ([2]). Пространство Y нормально и сильно $\mathfrak{m}$-компактно, X – перистый паракомпакт ([6]), теснота которого не превосходит $\mathfrak{m}$. Докажем последнее. Заметим, что теснота всякого бикомпакта, лежащего в произведении не более чем $\mathfrak{m}$ пространств тесноты $\leqslant \mathfrak{m}$, не превосходит $\mathfrak{m}$ ([5]). Вполне регулярное перистое пространство является пространством точечно-счётного типа ([6]), т. е. покрывается бикомпактами, характер которых в пространстве счетен. Доказательство завершает

П р е д л о ж е н и е. *Пусть P – регулярное пространство, $P = \cup\{P_\alpha\colon \alpha \in A\}$ и для всех $\alpha \in A$ теснота P_α и характер P_α в P не превосходят $\mathfrak{m}$. Тогда теснота P не превосходит $\mathfrak{m}$.*

Таким образом, если $\mathfrak{m} > \aleph_0$, то $\Sigma_\mathfrak{m}$-произведение перистых паракомпактов, теснота которых не превосходит $\mathfrak{m}$, коллективно нормально в том и только в том случае, когда все сомножители, за исключением, быть может, счетного числа, бикомпактны. Отметим, что $\Sigma_\mathfrak{m}$-произведение перистых паракомпактов X_α, $\alpha \in A$, всегда содержит всюду плотное паракомпактное подпространство $\sigma = \{x \in X\colon |Q(x)| < \aleph_0\}$ (σ-произведение пространств X_α, $\alpha \in A$ ([4])), поскольку справедлива

Т е о р е м а 3. *σ-Произведение пространств *, любое конечное произведение которых паракомпактно, является паракомпактом.*

---

* Все пространства предполагаются регулярными.

Доказательство. Пусть $\sigma_n = \{x \in X\colon |Q(x)| \leqslant n\}$, $\sigma = \cup\{\sigma_n\colon n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Предварительно докажем

Утверждение I. *Если $\sigma_n \subseteq V \subseteq [V] \subseteq U \subseteq \sigma$, множества V и U открыты, а семейство открытых (в σ) множеств $\eta = \{H_\xi\colon \xi \in \Xi\}$ покрывает $\sigma_{n+1} \setminus U$, то существует локально-конечное открытое (в σ) покрытие $\sigma_{n+1} \setminus U$, вписанное в η.*

Пусть $B \subseteq A$. Определим $X_B = \{x \in X\colon x_\alpha = s_\alpha$, если $\alpha \in A \setminus B\}$ и проекцию p_B произведения X на X_B: $p_B(x) = y$, где $y_\alpha = x_\alpha$ при $\alpha \in B$ и $y_\alpha = s_\alpha$ при $\alpha \in A \setminus B$. Пусть $\mathfrak{A} = \{a \subseteq A\colon |a| = n+1\}$. Для каждого $a \in \mathfrak{A}$ определим $W_a = \{x \in \sigma\colon p_a(x) \in X_a \setminus [V]\} \setminus [V]$. Покажем, что семейство открытых множеств $w = \{W_a\colon a \in \mathfrak{A}\}$ локально конечно в σ. Пусть $x \in \sigma$. Поскольку $W_a \cap V = \varnothing$ для всех $a \in \mathfrak{A}$, можно считать, что $|Q(x)| > n$. Рассмотрим конечную систему множеств $\mathfrak{B} = \{b\colon b \subseteq Q(x),\ |b| \leqslant n\}$. Очевидно, $p_b(x) \in \sigma_n \subseteq V$ для всех $b \in \mathfrak{B}$. Для каждой точки $p_b(x)$, $b \in \mathfrak{B}$, выберем стандартную окрестность, с которой эта точка содержится в V: $\mathcal{O}(b) = \{y \in \sigma\colon y_\alpha \in \mathcal{O}(b, \alpha)$, если $\alpha \in K(b)\}$, где $K(b)$ — конечное подмножество A, множество $\mathcal{O}(b, \alpha)$ открыто в X_α и содержит $(p_b(x))_\alpha$ при $\alpha \in K(b)$. Пусть $K = \cup\{K(b)\colon b \in \mathfrak{B}\}$. Для каждого $\alpha \in K$ определим $\mathcal{O}(\alpha) = \cap\{\mathcal{O}(b, \alpha)\colon x_\alpha \in \mathcal{O}(b, \alpha),\ b \in \mathfrak{B}\}$. Пусть $\mathcal{O} = \{y \in \sigma\colon y_\alpha \in \mathcal{O}(\alpha)$, если $\alpha \in K\}$. Открытое множество $\mathcal{O}$ содержит точку x и может пересекаться лишь с теми W_a, для которых $a \subseteq Q(x)$. В самом деле, пусть $y \in \mathcal{O} \cap W_a$ и $a \setminus Q(x) \neq \varnothing$. Тогда $Q(x) \cap a = b \in \mathfrak{B}$. Ясно, что $(p_a(y))_\alpha = (p_b(x))_\alpha = s_\alpha$ при $\alpha \in A \setminus a$. Если $\alpha \in (a \setminus b) \cap K(b)$, то $x_\alpha = s_\alpha = (p_b(x))_\alpha \in \mathcal{O}(b, \alpha)$. Следовательно, $\mathcal{O}(\alpha) \subseteq \mathcal{O}(b, \alpha)$ и $y_\alpha \in \mathcal{O}(b, \alpha)$. При $\alpha \in b \cap K(b)$ снова $x_\alpha = (p_b(x))_\alpha \in \mathcal{O}(b, \alpha)$, и $y_\alpha \in \mathcal{O}(b, \alpha)$. Итак $p_a(y) \in \mathcal{O}(b) \subseteq V$, что противоречит условию $p_a(y) \in X_a \setminus [V]$.

Пусть $a \in \mathfrak{A}$. Поскольку X_a — паракомпакт, существует локально-конечная система открытых (в X_a) множеств $\rho = \{P_\omega\colon \omega \in \Omega_a\}$, вписанная в систему $\{H_\xi \cap X_a\colon \xi \in \Xi\}$ и покрывающая $X_a \setminus U$. Для каждого $\omega \in \Omega_a$ выберем $\xi(\omega) \in \Xi$ так, чтобы $P_\omega \subseteq H_{\xi(\omega)}$. Пусть $\Gamma_\omega = p_a^{-1}(P_\omega) \cap H_{\xi(\omega)} \cap W_a$ для каждого $\omega \in \Omega_a$. $\Omega = \cup\{\Omega_a\colon a \in \mathfrak{A}\}$. Легко проверяется, что система $\gamma = \{\Gamma_\omega\colon \omega \in \Omega\}$ является искомым покрытием.

Утверждение II. *Если $\sigma_n \subseteq U \subseteq \sigma$ и U открыто, то найдется открытое множество V такое, что $\sigma_n \subseteq V \subseteq [V] \subseteq U$.*

Поскольку при $n = 0$ утверждение II очевидно, предположим, что оно справедливо при $n = k$, и пусть $\sigma_{k+1} \subseteq U$. Найдутся открытые множества V_1 и V_2 такие, что $\sigma_k \subseteq V_2 \subseteq [V_2] \subseteq V_1 \subseteq [V_1] \subseteq U$. Если $x \in \sigma_{k+1} \setminus V_1$, то выберем окрестность Ox точки x такую, что $[Ox] \subseteq U$. Согласно утверждению I существует локально-конечная система открытых множеств γ, покрывающая $\sigma_{k+1} \setminus V_1$ и вписанная в $\{Ox\colon x \in \sigma_{k+1} \setminus V_1\}$. Пусть $V = V_1 \cup \cup\{\Gamma\colon \Gamma \in \gamma\}$. Из консервативности системы γ следует, что $[V] \subseteq U$.

Пусть теперь μ — произвольное открытое покрытие σ, $\sigma_0 \in \Gamma_0 \in \mu$, $\delta_0 = \{\Gamma_0\}$. Предположим, что уже определена локально-конечная система открытых множеств δ_n, вписанная в μ и покрывающая σ_n. Пусть $U = \cup\{\Gamma\colon \Gamma \in \delta_n\}$. Если $\sigma_{n+1} \setminus U \neq \varnothing$, то из утверждений II и I следует, что найдется локально-конечное открытое покрытие $\sigma_{n+1} \setminus U$, вписанное в μ. Обозначим это покрытие через γ. Тогда $\gamma \cup \delta_n = \delta_{n+1}$ является открытым локально-конечным покрытием σ_{n+1}, вписанным в μ. Система $\delta = \cup\{\delta_n\colon n = 0, 1, 2, \ldots\}$ покрывает σ и вписана в μ. Таким образом, σ паракомпактно ((7), теорема 5.1.4).

Теорема 4. *σ-Произведение пространств, любое конечное произведение которых финально компактно, является финально компактным пространством*.*

---

* Доказательство теоремы 4 вполне аналогично доказательству предложения 3 из (4).

Следствие. *Пусть паракомпакт X является непрерывным образом $\Sigma_{\mathfrak{m}}$-произведения пространств, любое конечное произведение которых финально компактно. Тогда X финально компактно* *.

В самом деле, образ σ-произведения в этом случае представляет собой всюду плотное финально компактное подпространство паракомпакта X. Отсюда следует, что X является финально компактным пространством ([9]).

Автор благодарен В. И. Пономареву за внимание, проявленное к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. П. Комбаров, ДАН, **199**, 526 (1971). [2] А. П. Комбаров, ДАН, **205**, 1033 (1972). [3] A. H. Stone, Bull. Am. Math. Soc., **54**, 977 (1948). [4] H. H. Corson, Am. J. Math., **81**, 785 (1959). [5] В. И. Малыхин, ДАН, **203**, 1001 (1972). [6] А. В. Архангельский, Матем. сборн., **67**, 55 (1965). [7] R. Engelking, Outline of General Topology, Amsterdam, 1968. [8] R. Engelking, Fund. Math., **59**, 221 (1966). [9] S. Willard, Canad. Math. Bull., **14**, 127 (1971).

* Следствие является усилением следствия 3 из ([8]).