Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 1

УДК 517.864

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. А. ГОЛУБЕВА

О СЕМЕЙСТВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ТИПА ФЕЙНМАНА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 XI 1972)

Настоящая работа посвящена получению дифференциальных уравнений для некоторого интеграла, рассматриваемого в физике. По-видимому, сходящиеся фейнмановские интегралы представляют собой новый класс специальных функций, удовлетворяющих некоторым дифференциальным уравнениям. Эти уравнения в частных производных являются обобщением гипергеометрического дифференциального уравнения. Известно, что фейнмановские интегралы обладают некоторыми свойствами, напоминающими свойства гипергеометрических функций, а именно, они являются многозначными аналитическими функциями, ветвящимися на многообразии Ландау интеграла, причем различные ветви каждой из этих функций являются линейными комбинациями конечного числа из них. Заметим, что некоторые обобщения гипергеометрических функций уже рассматривались в начале XX века П. Аппелем и Кампе де Ферье (1).

Развитая П. Г. Гриффитсом теория интегралов от рациональных дифференциальных форм (2) позволяет получать дифференциальные уравнения для фейнмановских интегралов, зависящих от параметров. Дифференциальное уравнение для фейнмановского интеграла однопетлевой диаграммы получено в работе (3). Это дифференциальное уравнение в частных производных с полиномиальными коэффициентами, имеющее второй порядок, причем его коэффициент при второй производной обращается в нуль на многообразии Ландау интеграла.

Мы рассмотрим сходящийся фейнмановский интеграл собственно-энергетической диаграммы с тремя линиями в двумерном пространстве энергий — импульсов (4):

$$J(s)=\int\limits_F \frac{\xi_1\,d\xi_2\wedge d\xi_3-\xi_2\,d\xi_1\wedge d\xi_3+\xi_3\,d\xi_1\wedge d\xi_2}{s_0\xi_1\xi_2\xi_3-\left(\sum\limits_{i=1}^{3} s_i\xi_i\right)(\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3)},$$

где F — кусочно-гладкая поверхность, расположенная в первом квадранте и не пересекающая поверхность, на которой обращается в нуль знаменатель подынтегрального выражения. Многообразие Ландау этого интеграла имеет уравнение (5)

$$\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}+\sqrt{s_3}+\sqrt{s_0}=0,$$

или

$$[(s_0-s_1-s_2-s_3)^2-4(s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3)]^2-64s_0h_1s_2s_3=0.$$

Для получения дифференциального уравнения для интеграла $J(s)$ воспользуемся следующей теоремой Гриффитса (2).

Теорема. *Пусть дана дифференциальная форма в проективном пространстве* $P^{n-1}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$

$$\omega=(P(\xi)\,\omega^*(\xi))\,/\,Q(\xi)^k,$$

где $\omega^*(\xi)=\xi_1\,d\xi_2\wedge\ldots\wedge d\xi_n-\xi_2\,d\xi_1\wedge d\xi_3\wedge\ldots\wedge d\xi_n+\ldots,$ $P(\xi)$ *и*

$Q(\xi)$ — однородные многочлены степеней p и q соответственно, так что выполнено условие $p = kq - n$.

Если многочлен $P(\xi)$ принадлежит идеалу $(Q_{\xi_1}, \ldots, Q_{\xi_n})$, т.е. представим в виде

$$P(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\xi)\, Q_{\xi_i},$$

то порядок полюса можно понизить с k на $k-1$, причем

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\xi)\, Q_{\xi_i} \omega^*(\xi)}{Q^k} = \frac{1}{k-1} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \xi_i} \omega^*(\xi)}{Q^{k-1}} + d\gamma,$$

где γ — рациональная дифференциальная форма на $P^{n-1}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ степени $n-2$, имеющая полюс на Q.

В свою очередь условие принадлежности многочлена идеалу дается следующей теоремой Маколея [6].

Теорема. *Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — однородные многочлены переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ степеней $l_1, l_2, \ldots, l_n$ соответственно такие, что уравнения $R_1(\xi) = 0$, $R_2(\xi) = 0, \ldots$, $R_n(\xi) = 0$ не имеют общего решения в $P^{n-1}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.*

Многочлен $P(\xi)$ принадлежит идеалу $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$, если его степень удовлетворяет неравенству $p \geqslant l + 1$, где

$$l = \sum l_i - n.$$

Применяя теорему Гриффитса для получения дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет интеграл $J(s)$, мы рассмотрим идеал, порожденный тремя функциями Q_{ξ_1}, Q_{ξ_2}, Q_{ξ_3}, причем

$$Q(\xi, s) = s_0 \xi_1 \xi_2 \xi_3 - \left(\sum_{i=1}^{3} s_i \xi_i \right) (\xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_3).$$

Из теоремы Маколея вытекает, что понижение порядка полюса интеграла $J(s)$, продифференцированного по параметрам, возможно лишь после двух или более дифференцирований (см. [2]). Дифференцирование $J(s)$ дает

$$\frac{\partial J}{\partial s_i} = -\int \frac{Q_{s_i} \omega^*(\xi)}{Q(\xi, s)^2}, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial s_i\, \partial s_j} = 2 \int \frac{Q_{s_i} Q_{s_j} \omega^*(\xi)}{Q(\xi, s)^3}.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, можно доказать следующее тождество:

$$\sum_{i=0}^{3} c_{ii} Q_{s_i} Q_{s_i} + \sum_{\substack{1 \leqslant j,\, k \leqslant 3 \\ j<k}} c_{jk} Q_{s_j} Q_{s_k} + \sum_{j=1}^{3} \left[s_0 \Phi_j + s_j \left(\frac{c_{00}}{s_0} + \rho_0 \right) \right] Q_{s_0} Q_{s_j} =$$

$$= Q \sum_{i=0}^{3} \left(\frac{c_{ii}}{s_i} + \frac{\rho_i}{2} - \frac{k s_i}{2} \right) Q_{s_i} + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\xi, s)\, Q_{\xi_i},$$

где c_{ii}, $i = 0, 1, 2, 3$, c_{jk}, $1 \leqslant j$, $k \leqslant 3$, $j < k$, — произвольные постоянные,

$$\Phi_i = \frac{1}{2 s_j s_k} (c_{ij} s_k + c_{ik} s_j - c_{jk} s_i), \quad i \neq j \neq k, \quad 1 \leqslant i, j, k \leqslant 3,$$

$$\rho_i = \frac{c_{ii}}{s_i} - \Phi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \rho_0 = -\rho_1 - \rho_2 - \rho_3,$$

$$\lambda_i(\xi, s) = \left(\frac{\rho_i}{2} + \frac{k s_i}{6} \right) (\xi_i^3 \xi_j + \xi_i^3 \xi_k) + \left[\frac{\rho_0}{3} + \rho_i + (s_0 - s_1 - s_2 - s_3) \frac{k}{6} \right] \xi^2 \xi_j \xi_k +$$

$$+ \left(-\frac{\rho_j}{2} + \frac{k s_j}{6} \right) (\xi_i \xi_j^2 \xi_k + \xi_i^2 \xi_j^2) + \left(-\frac{\rho_k}{2} + \frac{k s_k}{6} \right) (\xi_i \xi_j \xi_k^2 + \xi_i^2 \xi_k^2), \quad i \neq j \neq k;$$

k — некоторый коэффициент пропорциональности, являющийся рациональной функцией переменных s, подобранный таким образом, чтобы выполнялось равенство $\sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \xi_i} = kQ$.

Из этого тождества легко получить следующее дифференциальное уравнение для интеграла $J(s)$:

$$\sum_{i=0}^{3} c_{ii} \frac{\partial^2 J}{\partial s_i^2} + \sum_{j=1}^{3} \left[s_0 \Phi_j + s_j \left(\rho_0 + \frac{c_{00}}{s_0} \right) \right] \frac{\partial^2 J}{\partial s_0 \, \partial s_j} + \sum_{i=0}^{3} \left(\frac{2c_{ii}}{s_i} + \rho_i \right) \frac{\partial J}{\partial s_i} = 0. \qquad (1)$$

Таким образом, интеграл $J(s)$ удовлетворяет семейству дифференциальных уравнений в частных производных, линейно зависящему от семи параметров. После приведения коэффициентов этого уравнения к общему знаменателю мы получим семейство дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами.

Исследованию свойств решений уравнений в частных производных с полиномиальными коэффициентами посвящена работа И. Н. Бернштейна ([7]). Мы сформулируем основной результат этой работы и применим его к исследованию функции $J(s)$.

Рассмотрим кольцо D дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами на $(N+1)$-мерном комплексном линейном пространстве V. Пусть $s_0, s_1, \ldots, s_N$ — система координат на пространстве V, а $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_N$ — сопряженная система координат на пространстве V^*. Каждый оператор $\mathcal{D} \in D$ однозначно записывается в виде $\mathcal{D} = \sum\limits_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} s^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^\beta$,

где $s^\alpha = s_0^{\alpha_0} \ldots s_N^{\alpha_N}$, $\left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial s_0} \right)^{\beta_0} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial s_N} \right)^{\beta_N}$. Обозначим через $\sigma(\mathcal{D})$ символ оператора $\mathcal{D}$, т. е.

$$\sigma(\mathcal{D}) = \sum_{|\beta| = \deg \mathcal{D}} c_{\alpha\beta} s^\alpha \tau^\beta.$$

Пусть $\mathcal{E}$ — обобщенная функция, принадлежащая пространству S' медленно растущих обобщенных функций и удовлетворяющая некоторой системе дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = 0$, где $\mathcal{E}$ — идеал в кольце D, удовлетворяющий некоторому условию. Чтобы определить это условие, рассмотрим символы операторов $\mathcal{D}$, принадлежащих идеалу $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\Delta = Z(\mathfrak{A})$ множество нулей символов $\sigma(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} \in \mathfrak{A}$. Очевидно, что Δ является множеством точек в пространстве $V \times V^*$: $\Delta = Z(\sigma(\mathcal{D})) \subset V \times V^*$. Обозначим через $\tilde{\Delta}$ его проекцию на пространство $V(s_0, s_1, \ldots, s_N)$, а через $\tilde{\Delta}_R$ — вещественную часть этой проекции. Если

$$\dim \tilde{\Delta} \leqslant N + 1, \qquad (2)$$

то имеет место следующая теорема Бернштейна.

Теорема. *Любое решение системы уравнений $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = 0$ аналитично в области $V \setminus \tilde{\Delta}_R$.*

Всякое решение системы уравнений $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = 0$ аналитически продолжается с произвольного односвязного открытого множества $\Omega \subset V - \tilde{\Delta}_R$ на множество $V - \tilde{\Delta}$ как многозначная аналитическая функция.

В окрестности любой точки $x \in V - \tilde{\Delta}$ все аналитические решения системы $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = 0$ образуют конечномерное пространство, т. е. все ветви этой многозначной аналитической функции являются линейными комбинациями конечного числа из них.

Возвращаясь к функции $J(s)$, отметим, что мы получили дифференциальный оператор для нее, применяя теорему Маколея для многочленов шестой степени по ξ. Но степень многочленов, принадлежащих идеалу, ограничена лишь снизу. Поэтому ничто не мешает нам попытаться найти тождество для многочленов девятой степени и получить из него дифференциальное уравнение, связывающее производные интеграла $J(s)$ порядков не выше третьего *, и так далее. По-видимому, интеграл $J(s)$ удовлетворяет довольно большому классу дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, которые порождают идеал в кольце дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами. Для применения теоремы Бернштейна достаточно показать, что из семейства дифференциальных операторов (1) можно выделить некоторую совокупность операторов, множество нулей символов которых удовлетворяет условию (2). С этой целью выпишем символ дифференциального оператора (1)

$$\sigma(\mathscr{D}) = \sum_{i=0}^{3} c_{ii}\tau_i^2 + \sum_{\substack{1\leqslant i,\, j\leqslant 3\\ i<j}} c_{ij}\tau_i\tau_j + \sum_{i=1}^{3}\left[s_0\Phi_i + s_i\left(\frac{c_{00}}{s_0} + \rho_0\right)\right]\tau_0\tau_i.$$

Рассмотрим символы операторов при следующих значениях произвольных постоянных: $c_{ii} = 1$, $i = 0, 1, 2, 3$, остальные шесть c_{ij} равны нулю. Получим

$$s_i\tau_i^2 + s_1\tau_1\tau_0 + s_2\tau_2\tau_0 + s_3\tau_3\tau_0 = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Легко видеть, что множество нулей Δ указанных символов в пространстве (s, τ) удовлетворяет уравнениям

$$s_0\tau_0^2 = s_1\tau_1^2 = s_2\tau_2^2 = s_3\tau_3^2.$$

Следовательно, проекция множества нулей символов на пространство s имеет уравнение

$$\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} + \sqrt{s_3} + \sqrt{s_0} = 0,$$

т. е. совпадает с многообразием Ландау интеграла $J(s)$. Очевидно, условие (2) выполнено.

Как и следовало ожидать, интеграл $J(s)$ является многозначной аналитической функцией, ветвящейся на многообразии Ландау, причем все его ветви являются линейными комбинациями конечного числа из них.

Заметим в заключение, что метод получения дифференциальных уравнений для фейнмановских интегралов, изложенный в настоящей работе, является достаточно общим и позволяет получать уравнения и для других фейнмановских интегралов.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
экономики минерального сырья и
геологоразведочных работ
Москва

Поступило
26 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Appell, J. Kampé de Feriét, Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques, Paris, 1926. [2] P. A. Griffiths, Ann. Math., Ser. 2, 90, 490 (1969). [3] В. А. Голубева, Журн. теоретич. и матем. физ., 9, № 3 (1971). [4] G. Ponzano, T. Regge et al., Comm. Math. Phys., 15, 83 (1969). [5] T. Regge, Relativistic Feynman Amplitudes. Вопросы теории элементарных частиц, Дубна, 1968. [6] F. S. Macauley, The Algebraic Theory of Modular Systems, London, 1916. [7] И. Н. Бернштейн, Функциональн. анализ и его приложения, 5, в. 2, 1 (1971).

* Такое тождество автором получено.