

И. С. КАЦ

ГУСТОТА СПЕКТРА СТРУНЫ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 14 XI 1972)

1. Пусть на интервале I вещественной оси x с концами в точках a и b ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$), открытом или замкнутом с одной или с двух сторон, определена неубывающая функция $M(x)$. Будем рассматривать $M(x)$ как функцию распределения масс струны $S = S(M)$, натянутой единичной силой на интервале I .

Спектр регулярной струны * всегда дискретен, т. е. представляет собой последовательность (бесконечную, если множество F_M точек роста функции $M(x)$ бесконечно) вещественных чисел, не имеющую конечных предельных точек: $(0 \leq) \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$; более того, как установил М. Г. Крейн в работе (3), в случае бесконечности этой последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{M'(x)} dx. \quad (1)$$

Определение. Струну S будем относить к классу $\mathcal{S}_\alpha$ в том и только том случае, когда ее спектр дискретен и сходится ряд $\sum \lambda_j^{-\alpha}$, распространенный по ненулевым λ_j .

В п.2 настоящей работы изучается вопрос о принадлежности струн классу $\mathcal{S}_\alpha$ с $\alpha \in (0, 1)$.

Вопрос о принадлежности струны классу $\mathcal{S}_1$ был полностью решен М. Г. Крейном еще в 1952 г. (см. (4), Введение). Он установил, что струна S принадлежит классу $\mathcal{S}_1$ в том и только том случае, когда каждый из ее концов является (здесь мы следуем терминологии, принятой в теории диффузионных процессов; см., например, (5), § 58) концом-входом или концом-выходом **. В случае натуральных $\alpha > 1$ вопрос о принадлежности классу $\mathcal{S}_\alpha$ полностью решен в наших работах (7, 8).

* В соответствии с принятой в нашей работе (1) классификацией левый (правый) конец струны называется регулярным, если ограничены снизу (сверху) множество F_M точек роста функции $M(x)$ и множество ее значений. В противном случае он называется сингулярным. Струна с двумя регулярными концами называется регулярной. Спектр струны с двумя сингулярными концами определяется нами как спектр единственного неотрицательного самосопряженного в пространстве $\mathcal{L}_M^{(2)}(I)$ расширения L оператора L_0'' , построенного в работе (2) с помощью обобщенного дифференциального выражения $l_M[\cdot] = -\frac{d}{dM} \frac{d}{dx}$ (см. (2), § 1, п. 2, п. 3; § 3, п. 3). В случае, когда левый (правый) конец струны S регулярен, в определении оператора L , должно фигурировать еще однородное граничное условие в точке $a_0 = \inf F_M$ (точке $b_0 = \sup F_M$), например, $y^-(a_0) = 0$ ($y^+(b_0) = 0$); здесь мы не приводим точных определений.

** Дифференциальное выражение $\frac{d}{dM} \frac{d}{dx}$ после работы Феллера (6) играет исключительную роль в теории диффузионных процессов. Правый конец $x = b$ там называют концом-входом (концом-выходом), если $M(b) = \sup M(x) < \infty$ ($b_0 = \sup F_M < \infty$) и функция $M(b) - M(x)$ (функция $M(x)$) суммируема в левой окрестности точки $x = b_0$. Для левого конца $x = a$ вводятся аналогичные определения. Конец, являющийся концом-входом и концом-выходом, — это регулярный конец.

Если струна S с помощью конечного множества точек из I разбита на части, то она принадлежит классу $\mathfrak{S}_\alpha$ в том и только том случае, когда каждая из струн-частей принадлежит $\mathfrak{S}_\alpha$. В связи с этим достаточно рассматривать струны, у которых хотя бы один конец регулярен. Ниже во всех предложениях мы считаем, что левый конец $x = a$ является регулярным и $a > -\infty$, а правый $x = b$ — концом-входом или концом-выходом.

2. Введем для каждой точки $x \in I$ следующие четыре функции переменной t :

$$U_r(t; x) = \int_0^t [M(x+s) - M(x-0)] ds;$$

$$U_l(t; x) = \int_0^t [M(x+0) - M(x-s)] ds;$$

$$U(t; x) = \int_0^t [M(x+s) - M(x-s)] ds;$$

$$\bar{U}(t; x) = \max \{U_r(t; x); U_l(t; x)\}.$$

Первая из них определена при $0 \leq t < b - x$, вторая при $0 \leq t < x - a$, а следующие две при $0 \leq t < d(x)$, где $d(x) = \min \{x - a, b - x\}$.

Теорема 1. Для того чтобы струна S принадлежала классу $\mathfrak{S}_\alpha$ с $\alpha \in (0, 1)$, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_a^b \min \left\{ \int_0^{b-x} (U_r(t; x))^{\alpha-1} dt; \int_0^{x-a} (U_l(t; x))^{\alpha-1} dt \right\} dM(x) < \infty. \quad (2)$$

Из теоремы вытекает, что каждое из условий

$$\int_a^b dM(x) \int_0^{b-x} (U_r(t; x))^{\alpha-1} dt < \infty; \quad \int_a^b dM(x) \int_0^{x-a} (U_l(t; x))^{\alpha-1} dt < \infty \quad (3)$$

является достаточным для принадлежности струны S классу $\mathfrak{S}_\alpha$. Достаточность первого из этих условий была установлена нами еще в работе ⁽⁷⁾ (теорема 1). Второе условие (3) в случае, когда $M(x)$ не имеет точек разрыва и интервалов постоянства, является дуальным к первому, т. е. получается из первого путем замены длин участков струны их массами, а масс — длинами (см. ⁽⁴⁾, § 5 п.2; ⁽⁹⁾, § 12).

Теорема 2. Для принадлежности струны S классу $\mathfrak{S}_\alpha$ с $\alpha \in (0, 1)$ необходимо выполнение каждого из двух (эквивалентных) условий

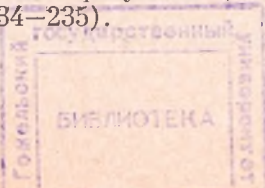
$$\int_a^b dM(x) \int_0^{d(x)} (\bar{U}(t; x))^{\alpha-1} dt < \infty; \quad \int_a^b dM(x) \int_0^{d(x)} (U(t; x))^{\alpha-1} dt < \infty \quad (4)$$

Отметим, что приведенные в теоремах 1 и 2 условия принадлежности классу $\mathfrak{S}_\alpha$ несут двойную нагрузку: они «прощупывают», с одной стороны, поведение функции $M(x)$ в точках ее роста, лежащих внутри интервала I , и, с другой стороны, — на концах.

Из теорем 1 и 2 легко вытекают два следствия.

Следствие 1. Если функция $M(x)$ выпукла вверх (вниз) на I , то для принадлежности струны S классу $\mathfrak{S}_\alpha$ с $\alpha \in (1/2, 1)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось второе (первое) условие (3).

Последнее обобщает и уточняет результаты, полученные в этом направлении Э. Хилле (⁽¹⁰⁾, стр. 234–235).



Струну S мы называем стильтесовской (см. ⁽⁹⁾, § 13), если она несет только сосредоточенные массы $m_1, m_2, m_3, \dots$, расположенные в точках $(a =) x_1 < x_2 < x_3 < \dots$; $\lim x_n = b$. Будем полагать $l_j = x_{j+1} - x_j$ ($j = 1, 2, \dots$).

Следствие 2. Если у стильтесовской струны S последовательность $\{l_k\}_1^\infty$ не убывает (не возрастает), а последовательность $\{m_k\}_1^\infty$ не возрастает (не убывает), то для принадлежности этой струны классу $\mathfrak{S}_\alpha$ с $\alpha \in (0, 1)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось второе (первое) условие (3).

Мы получили этим самым дополнение к исследованию Стильтеса по непрерывным дробям (см. по этому поводу ⁽⁹⁾, § 13, а также ^(4, 7)).

Следствия 1 и 2, в условия которых входит достаточно полная информация о поведении функции $M(x)$ внутри интервала I , решают вопрос о принадлежности струны к классу $\mathfrak{S}_\alpha$ по поведению $M(x)$ на сингулярном конце. Следующее следствие (вытекающее только из теоремы 2) связывает этот вопрос с поведением функции $M(x)$ в ее точках роста, лежащих внутри интервала I .

Следствие 3. Если $S \in \mathfrak{S}_\alpha$ с $\alpha \in (0, 1)$, то при M -почти всех $x \in I$

$$\lim_{s \downarrow 0} s^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (M(x+s) - M(x-s)) = \infty. \quad (5)$$

Это следствие представляет интерес лишь при $\alpha \in (0, 1/2]$, ибо в силу известной теоремы Валле — Пуссена (см. ⁽¹¹⁾, гл. IV, теорема (9.6)) у любой неубывающей функции $M(x)$ M -почти всюду существует конечная или бесконечная симметричная производная $M'(x) \neq 0$.

Определение. Будем называть степенью равномерности функции $M(x)$ точную верхнюю грань $\beta^*(M)$ чисел β таких, что множество точек x , для которых

$$\lim_{s \downarrow 0} s^{-\beta} (M(x+s) - M(x-s)) < \infty, \quad (6)$$

имеет положительную M -меру.

В силу упомянутой теоремы Валле — Пуссена, $\beta^*(M) \in [0, 1]$. В случае, когда $M'(x) > 0$ на множестве положительной меры, $\beta^*(M) = 1$.

Определение. Показателем сходимости спектра струны $S = S(M)$, имеющей дискретный спектр, будем называть число $\alpha^*(M) = \inf \{\alpha : S \in \mathfrak{S}_\alpha\}$.

Из следствия 3 получаем

Следствие 4. Если $\alpha^*(M) \in [0, 1/2]$, то $\beta^*(M) \leq \alpha^*(M) (1 - \alpha^*(M))^{-1}$.

3. Пусть S — регулярная струна и ее функция распределения масс $M(x)$ является постоянной на интервалах $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ (занумерованных в порядке убывания длин: $|\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots$), сумма длин которых равна длине интервала I . Если $|\Delta_n| = O(n^{-\delta})$ при $n \rightarrow \infty$ с $\delta > 1$, то, как показал В. В. Борзов ⁽¹²⁾, $\lambda_n \geq Cn^{1+\delta}$, $n = 1, 2, \dots$. Согласно следствию 4, $\beta^*(M) \leq \delta^{-1}$. Мы получили предложение теории функций вещественной переменной. Оно иллюстрирует и в этом частном случае усиливает одну теорему И. Л. Бродского о сингулярных функциях (⁽¹³⁾, теорема 1). В частности, мы получаем следующее

Утверждение. Для любой неубывающей отличной от константы функции $M(x)$ множество точек роста которой содержится в канторовом совершенном множестве, $\beta^*(M) \leq \log_3 2$.

4. Ниже будем считать, что функция $M(x)$ определена также при $x \leq a$ равенством $M(x) = M(a) = \inf_{x \in I} M(x)$, а если правый конец $x = b$ регулярен, то и при $x \geq b$ равенством $M(x) = M(b) = \sup_{x \in I} M(x)$. Область определения так доопределенной функции $M(x)$ обозначим через $\bar{I}$.

Пусть $K(x)$ — какая-либо неубывающая функция, определенная на I . При фиксированном $x \in I$ рассмотрим отношения

$$\frac{K(x+s) - K(x)}{s^\beta}, \quad \frac{K(x) - K(x-t)}{t^\beta}, \quad \frac{K(x+r) - K(x-r)}{r^\beta}, \quad (7)$$

где $s > 0$, $x+s \in I$, $t > 0$, $r > 0$, $x+r \in I$. Конечный или бесконечный предел первого (второго) отношения (7) при $s \downarrow 0$ (при $t \downarrow 0$), верхний (нижний) пределы этого отношения обозначим соответственно через $K_\beta^+(x)$, $\bar{K}_\beta^+(x)$, $\underline{K}_\beta^+(x)$ (через $K_\beta^-(x)$, $\bar{K}_\beta^-(x)$, $\underline{K}_\beta^-(x)$). Для $x \in F_M$ точную нижнюю грань третьего отношения (7), взятую по всем r таким, что $[K(x+r) - K(x-r)]r \leq 1$, обозначим через $\kappa_\beta(x, K)$.

Определение. Будем говорить, что неубывающая функция $K(x)$ ($x \in I$) принадлежит классу (D_β) , если функция $(\kappa_\beta(x; K))^{-1/(\beta+1)}$ переменной x K -суммируема на I .

Определение. Будем говорить, что неубывающая функция $K(x)$ β -подчиняет функцию $M(x)$, если: 1) $K(x) \in (D_\beta)$; 2) $M_K(x) = M(x) + K(x) \in (D_\beta)$; 3) левый конец струны $S(M_K)$ регулярен, а правый — это конец-вход или конец-выход.

Теорема 3. Если существует неубывающая функция $K(x)$, которая при $\beta \in (0, 1]$ β -подчиняет функцию $M(x)$ распределения масс струны $S(M)$ (в частности, если $M(x) \in (D_\beta)$), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \lambda_n^{-\beta/(1+\beta)} \leq 2(\beta+1) \beta^{-\beta/(\beta+1)} \int_a^b [M_\beta^+(x)]^{1/(\beta+1)} + (M_\beta^-(x))^{1/(\beta+1)}]^{-1} dM(x). \quad (8)$$

Следствие. Если при условии теоремы 3 интеграл в (8) конечен, то $\alpha^*(M) \leq (1+\beta)^{-1}\beta$; если к тому же $\beta = \beta^*(M)$, то $\alpha^*(M) = (1+\beta)^{-1}\beta$.

Этот результат хорошо согласуется с работой Уно и Хонг⁽¹⁴⁾.

Теорема 4. Если при некотором $\beta \in (0, 1]$ на множестве положительной M -меры обе функции $\bar{M}_\beta^+(x)$ и $\bar{M}_\beta^-(x)$ принимают конечные значения, то $\lim_{n \rightarrow \infty} n \lambda_n^{-\beta/(\beta+1)} > 0$.

Приведем еще одно предложение, которое, возможно, при $\beta = \beta^*(M) < 1$ относится к пустому множеству струн. При $\beta = 1$ из него легко вытекает полученное М. Ш. Бирманом и В. В. Борзовым в работе⁽¹⁵⁾ обобщение на случай струны с сингуляторным правым концом асимптотической формулы (1) М. Г. Крейна (для этого достаточно в теореме 5 ограничиться абсолютно непрерывными функциями $K(x)$ с невозрастающей правой производной $K^+(x)$).

Теорема 5. Если при условии теоремы 3 M -почти всюду на I существуют $\bar{M}_\beta^+(x)$, $\bar{M}_\beta^-(x)$, $\bar{K}_\beta^+(x)$ и $\bar{K}_\beta^-(x)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \lambda_n^{-\beta/(\beta+1)} = B(\beta) \int_a^b [(M_\beta^+(x))^{1/(\beta+1)} + (M_\beta^-(x))^{1/(\beta+1)}]^{-1} dM(x),$$

где

$$B(\beta) = \beta^{\beta/(\beta+1)} (\beta+1)^{-2\beta/(\beta+1)} \Gamma^{-2} \left(\frac{2\beta+1}{\beta+1} \right).$$

Одесский технологический институт
пищевой промышленности им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. С. Кац, ДАН, 157, № 1, 34 (1964). ² И. С. Кац, Матем. сборн., 68 (110), № 2, 174 (1965). ³ М. Г. Крейн, ДАН, 75, № 3, 345 (1951). ⁴ И. С. Кац, М. Г. Крейн, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 2 (3), 136 (1958). ⁵ К. Ито, Вероятностные процессы, в. 2, 1963. ⁶ W. Feller, Trans. Am. Math. Soc., 77, 1 (1954). ⁷ И. С. Кац, ДАН, 126, № 6, 1180 (1959). ⁸ И. С. Кац, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 1 (26), 57 (1962). ⁹ И. С. Кац, М. Г. Крейн, О спектральных функциях струны, Доп. 2 к кн. Ф. Аткинсона: Дискретные и непрерывные граничные задачи, М., 1968, стр. 648. ¹⁰ E. Hille, Rendiconti Seminario Matematico Univ. Padova, 25, 214 (1956). ¹¹ С. Сакс, Теории интеграла, ИЛ, 1949. ¹² В. В. Борзов, Проблемы математ. физ., 4, Л., 1970, стр. 42. ¹³ М. Л. Бродский, УМН, 18, в. 2 (110), 186 (1963). ¹⁴ T. Uno, I. Hong, Japan. J. Math., 29, 152 (1959). ¹⁵ М. Ш. Бирман, В. В. Борзов, Проблемы математ. физ., 5, Л., 1970, стр. 24.