Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 6

УДК 518:517.91/94 *МАТЕМАТИКА*

Е. А. ВОЛКОВ

ДВУСТОРОННИЙ РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД В НЕЛИНЕЙНЫХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 14 II 1972)

Разностные двусторонние методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривались рядом авторов (например, ([1–3])). В ([2], [3]), в частности, требуется, чтобы некоторый функционал от правой части не менял знак вдоль искомого решения. Явные оценки погрешности разностного решения первой краевой задачи для специального линейного уравнения второго порядка и погрешности разностных собственных значений и собственных функций задачи (3), (4) при $p \equiv q \equiv 0$, $\beta_0 = \beta_1 = 0$ найдены Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым ([4], [5]). Излагаемый ниже разностный метод для задачи Коши, спектральных и нелинейных краевых задач для уравнения второго порядка является развитием методов ([6–9]) в линейных задачах. Этим методом производится комплексно проверка существования решения дифференциальной задачи и его локальной единственности, вычисление приближенного решения и получение через известные величины двусторонних оценок погрешности во всех точках заданного отрезка *. В случае спектральной задачи находятся также двусторонние приближения собственных значений. Метод действует при ограничениях, проверяемых через реальные величины.

Рассмотрим задачу

$$y'' = f(x, y, y', \lambda),\ 0 < x \leqslant 1, \quad y(0) = \varphi_0(\lambda), \quad y'(0) = \varphi_1(\lambda), \tag{1}$$

$$g(y(1), y'(1), \lambda) = 0, \tag{2}$$

где f, g, φ_i — заданные дважды непрерывно дифференцируемые на определяемых ниже областях функции, λ — параметр. Ее частными случаями являются, например, краевая задача

$$y'' = f(x, y, y'),\ 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = \lambda$$

(ищутся значения λ, при которых $y(0) = y(1) = 0$), задача о собственных значениях

$$y'' + p(x)y' + (\lambda r(x) + q(x))y = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

$$y(0) = -\beta_0, \quad y'(0) = \alpha_0, \quad \alpha_1 y(1) + \beta_1 y'(1) = 0, \tag{4}$$

где $r(x) > 0$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$ (условие (4) для $x = 0$ равносильно условию $\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = 0$ и некоторой нормировке собственных функций), и задача Коши (1) (получаемая формально, если $g \equiv 0$).

1. Задача Коши. Предположим, что функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ определена на $E = D\{-H < x_1 < 1 + H,\ |x_2| < \overline{Y}^0,\ |x_3| < \overline{Y}^1\} \times (\Lambda^0, \Lambda^1)$, где $H > 0$, $\overline{Y}^0 > 0$, $\overline{Y}^1 > 0$, Λ^0, Λ^1 — некоторые числа, а функции φ_i,

---

* Наличие приближенного решения и его двусторонней оценки погрешности эквивалентно некоторым двусторонним приближениям для решения.

$\mu = 0, 1$, заданы на (Λ^0, Λ^1), причем $|\varphi_\mu| < \overline{Y}^\mu$. Пусть $1 \leqslant i, j \leqslant 4$, $F_i = \sup\limits_E |\partial f/\partial x_i|$, $F_{ij} = \sup\limits_E |\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j| < \infty$, $\overline{Y}^2 = \sup\limits_E |f|$, $\overline{Y}^3 = F_1 + F_2\overline{Y}^1 + F_3\overline{Y}^2$, $\overline{Y}^4 = F_{11} + 2F_{12}\overline{Y}^1 + 2F_{13}\overline{Y}^2 + 2F_{23}\overline{Y}^1\overline{Y}^2 + F_{22}(\overline{Y}^1)^2 + F_{33}(\overline{Y}^2)^2 + F_2\overline{Y}^2 + F_3\overline{Y}^3$, $N > 0$ целое.

Допустим, что при $\lambda = \lambda^* \in (\Lambda^0, \Lambda^1)$ и некотором $h = 1/N < h_0 = \min\{H, 2/F_3\}$, определены величины $\tilde{y}_0^{(0)} = \varphi_0(\lambda^*)$, $v_0 = \varphi_1(\lambda^*) - hf(0, \tilde{y}_0^{(0)}, \varphi_1(\lambda^*), \lambda^*)/2$, $v_{k+1}^0 = v_k$, $v_{k+1}^m = v_k + hf(kh, \tilde{y}_k^{(0)}, (v_k + v_{k+1}^{m-1})/2, \lambda^*)$, $m = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqslant 2$ целое, $v_{k+1} = v_{k+1}^n$, $\tilde{y}_{k+1}^{(0)} = \tilde{y}_k^{(0)} + hv_{k+1}$, $\tilde{y}_k^{(1)} = (v_k + v_{k+1})/2$, $\xi_k = f(kh, \tilde{y}_k^{(0)}, \tilde{y}_k^{(1)}, \lambda^*)/h - (v_{k+1} - v_k)/h^2$, $k = 0, 1, \ldots, N$, $\tilde{y}_{N+1}^{(1)} = \tilde{y}_N^{(1)}$.

Пусть также $\rho = 1 - hF_3/2$, $a = 2 - \rho$, $b = hF_2$, $c = h(2\overline{Y}^3F_3 + \overline{Y}^4)/12$, $\eta_0^{(0)} = 0$, $\eta_0^{(1)} = \overline{Y}^3/6$, $\eta_{k+1}^{(1)} = (a\eta_k^{(1)} + b\eta_k^{(0)} + |\xi_k| + c)/\rho$, $\eta_{k+1}^{(0)} = \eta_k^{(0)} + h\eta_{k+1}^{(1)}$, $\varepsilon_k^{(0)} = h^2\eta_k^{(0)}$, $\varepsilon_k^{(1)} = h^2(3(\eta_k^{(1)} + \eta_{k+1}^{(1)}) + \overline{Y}^3)/6$, $0 \leqslant k \leqslant N$, $\varepsilon_{N+1}^{(\tau)} = \varepsilon_N^{(\tau)}$, $\widetilde{Y}^{(\tau)} = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant N} |\tilde{y}_k^{(\tau)}|$, $\tau = 0, 1$.

Теорема 1. *Если при $\lambda^* \in (\Lambda^0, \Lambda^1)$ и фиксированном $h < h_0$*

$$\widetilde{Y}^{(\tau)} + \varepsilon_N^{(\tau)} + 2h\overline{Y}^{\tau+1} < \overline{Y}^\tau, \quad \tau = 0, 1, \tag{5}$$

то задача (1) *при $\lambda = \lambda^*$ имеет на* $[0, 1]$ *единственное решение $y(x)$, причем $\mathfrak{M}(x, y) \equiv \{x_1 = x, x_2 = y(x), x_3 = y'(x); x \in [0, 1]\} \subset D$.*

Теорема 2. *Если задача* (1) *при $\lambda = \lambda^* \in (\Lambda^0, \Lambda^1)$* имеет на $[0, 1]$ *решение $y(x)$, причем $\mathfrak{M}(x, y) \subset D$, то найдется $h^* > 0$ такое, что при заданном λ^* для всех $h < h^*$, $h = 1/N$, выполнено* (5).

Теорема 3. *Если при $\lambda^* \in (\Lambda^0, \Lambda^1)$ выполнено* (5), *то*

$$|\tilde{y}^{(\tau)}(x) - y^{(\tau)}(x)| \leqslant \varepsilon_{m+1}^{(\tau)} + h^2\delta_x(1 - \delta_x)\overline{Y}^{\tau+2}/2, \quad \tau = 0, 1,$$

где $x \in [0, 1]$, $\tilde{y}^{(\tau)}(x) = (1 - \delta_x)\tilde{y}_m^{(\tau)} + \delta_x\tilde{y}_{m+1}^{(\tau)}$, $m = [x/h]$, $\delta_x = \{x/h\}$, y — решение задачи (1) *при* $\lambda = \lambda^*$, $\varepsilon_{m+1}^{(\tau)} \leqslant \varepsilon_N^{(\tau)} = O(h^2)$.

Обозначим через $dg/d\lambda$ полную производную по λ функции $g(y(1), y'(1), \lambda)$, где y — зависящее от λ решение задачи (1).

2. Задача (1), (2). Допустим, что функция $g(t_0, t_1, t_2)$ определена на $R = \{K_i < t_i < M_i;\ i = 0, 1\} \times (\Lambda^0, \Lambda^1)$, где K_i, M_i — некоторые числа. Пусть $0 \leqslant i, j \leqslant 2$; $G_i = \sup\limits_R |\partial g/\partial t_i|$, $G_{ij} = \sup\limits_R |\partial^2 g/\partial t_i \partial t_j| < \infty$; $m = 1, 2$, $\Phi_\mu^m = \sup\limits_{(\Lambda^0, \Lambda^1)} |\varphi_\mu^{(m)}| < \infty$, $\mu = 0, 1$; $\Omega_\nu(a, b, c, \alpha, \beta) = \sum\limits_{i=0}^{1} \omega_i^\nu(\overline{\alpha}\omega_{1-i} - \beta)(\omega_{1-i} - \omega_i)^{-1}\exp\{\omega_i\} - (1 + (-1)^\nu)c/2\bar{a}$, $\bar{a} = \max\{a, \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ — любое, $\overline{\alpha} = \alpha + c/\bar{a}$, $\omega_i = (b + (-1)^i\sqrt{\bar{a}^2 + b^2})/2$, $\tau = 0, 1$, $\dot{Y}^\tau = \Omega_\tau(F_2, F_3, F_4, \Phi_0^1, \Phi_1^1)$, $\ddot{Y}^\tau = \Omega_\tau(F_2, F_3, \bar{c}, \Phi_0^2, \Phi_1^2)$, $\bar{c} = F_{44} + 2F_{24}\dot{Y}^0 + 2F_{34}\dot{Y}^1 + 2F_{23}\dot{Y}^0\dot{Y}^1 + F_{22} \times (\dot{Y}^0)^2 + F_{33}(\dot{Y}^1)^2$, $\ddot{G} = G_{22} + 2G_{02}\dot{Y}^0 + 2G_{12}\dot{Y}^1 + 2G_{01}\dot{Y}^0\dot{Y}^1 + G_{00}(\dot{Y}^0)^2 + G_{11}(\dot{Y}^1)^2 + G_0\ddot{Y}^0 + G_1\ddot{Y}^1$. Обозначим через $\tilde{y}_k^{(\tau)}(\lambda_i)$, $\varepsilon_k^{(\tau)}(\lambda_i)$, $\widetilde{Y}^{(\tau)}(\lambda_i)$ значения $\tilde{y}_k^{(\tau)}$, $\varepsilon_k^{(\tau)}$, $\widetilde{Y}^{(\tau)}$, найденные при $\lambda^* = \lambda_i$, $i = 1, 2$, методом, изложенным в п. 1. Пусть $\tilde{g}_i = g(\tilde{y}_N^{(0)}(\lambda_i), \tilde{y}_N^{(1)}(\lambda_i), \lambda_i)$, $\sigma_i = |\tilde{g}_i| - \varepsilon_N^{(0)}(\lambda_i)G_0 - \varepsilon_N^{(1)}(\lambda_i)G_1$, $\rho_i^{(\tau)} = \varepsilon_N^{(\tau)}(\lambda_i) + |\lambda_2 - \lambda_1|\dot{Y}^\tau/2$.

Теорема 4. *Если $h < h_0$ фиксировано, $\lambda_i \in (\Lambda^0, \Lambda^1)$, $i = 1, 2$, $\lambda_2 > \lambda_1$,* $\widetilde{Y}^{(\tau)}(\lambda_j) + \rho_j^{(\tau)} + 2h\overline{Y}^{\tau+1} < \overline{Y}^\tau$, $K_\tau + \rho_j^{(\tau)} < \tilde{y}_N^{(\tau)}(\lambda_j) < M_\tau - \rho_j^{(\tau)}$, $j = 1, 2$, $\tau = 0, 1$, *причем*

$$\tilde{g}_1\tilde{g}_2 < 0, \quad \sigma_\nu > 0, \quad \nu = 0, 1, \tag{6}$$

то существует $\lambda = \lambda^0 \in (\lambda_1, \lambda_2)$, *при котором разрешима задача* (1), (2), *а также*

$$|\tilde{y}^{(\tau)}(x, \lambda_i) - y^{(\tau)}(x)| \leqslant R_i^\tau(x), \; i = 1, 2, \; \tau = 0, 1,$$

где $x \in [0, 1]$, $\tilde{y}^{(\tau)}(x, \lambda_i) = (1 - \delta_x)\tilde{y}_m^{(\tau)}(\lambda_i) + \delta_x \tilde{y}_{m+1}^{(\tau)}(\lambda_i)$, $m = [x / h]$, $\delta_x = \{x / h\}$, y — *решение задачи* (1), (2) *при* $\lambda = \lambda^0$, $R_i^\tau(x) = \varepsilon_{m+1}^{(\tau)}(\lambda_i) + h^2\delta_x(1 - \delta_x)\bar{Y}^{\tau+2} / 2 + (\lambda_2 - \lambda_1)\dot{Y}^\tau$.

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы* 4, *а также* $\sigma_1 + \sigma_2 - (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \ddot{G} > 0$, *то указанное в теореме* 4 λ^0 *единственно на* $[\lambda_1, \lambda_2]$, *причем* $dg / d\lambda \neq 0$ *на* $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Теорема 6. *Если выполнены все условия теоремы* 4, **кроме** (6), *причем* $\tilde{g}_1 \tilde{g}_2 > 0$, $\min\{\sigma_1, \sigma_2\} - (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \ddot{G} / 8 > 0$, *то при любом* $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ *задача* (1), (2) *неразрешима.*

Теорема 7. *Пусть при* $\lambda = \lambda_* \in (\Lambda^0, \Lambda^1)$ *задача* (1), (2) *разрешима, причем ее решение удовлетворяет условию теоремы* 2 *и кроме того* $dg / d\lambda \neq 0$ *при* $\lambda = \lambda_*$.

Тогда существует $h^* > 0$ *такое, что для любого* $h < h^*$ $(h = 1 / N)$ *найдутся* $\lambda_i \in (\Lambda^0, \Lambda^1)$, $i = 1, 2$, *для которых выполнены условия теорем* 4 *и* 5, *причем*

$$\lambda_1 < \lambda_* = \lambda^0 < \lambda_2, \quad \lambda_2 - \lambda_1 = O(h^2),$$

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} R_i^\tau(x) = O(h^2), \quad \tau = 0, 1.$$

3. В задаче (3), (4) приведенные оценки существенно упрощаются (для ее собственных значений $dg / d\lambda \neq 0$). Поиск двусторонних приближений собственных значений производится с учетом теорем 4—7 методом деления пополам по λ и др. Наличие оценок погрешности для собственной функции и производной позволяет при малом h установить число заведомо простых нулей у собственной функции на (0, 1), отличающееся на —1 от ее номера.

4. Рассмотренный метод распространяется на нелинейные задачи для уравнений первого и более высокого, чем второй, порядка, причем в случае уравнений высших порядков может потребоваться введение нескольких параметров. Допускается задание более общих, чем (2), (4), дополнительных условий, выражающихся через линейные [8] и нелинейные функционалы от y, которые могут быть аппроксимированы квадратурными формулами с точностью $O(h^2)$. Как и в линейном случае [6-9], строятся более точные поточечные оценки, а также схемы повышенного порядка точности.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
31 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Я. Ремез, Зап. Прир.-Тех. Вiд. АН УРСР, № 1 (1931). [2] А. Д. Горбунов, Ю. А. Шахов, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 3, № 2 (1963). [3] В. И. Девятко, Там же. [4] N. N. Bogoluboff, N. M. Kriloff, C. R., 186, № 7 (1928). [5] Н. М. Крылов, Избр. тр., 2, 1961. [6] Е. А. Волков, ДАН, 197, № 4 (1971). [7] Е. А. Волков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 112 (1971). [8] Е. А. Волков, Там же, 128 (1972). [9] Е. А Волков, Матем. заметки, 11, № 4 (1972).