

Ю. Д. СТРИГИН

ИЕРАРХИИ ОБЩЕРЕКУРСИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ОБЩЕРЕКУРСИВНЫХ ТИПОВ СТЕПЕНЕЙ НЕВЫЧИСЛИМОСТИ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 20 VII 1972)

1. В данной работе строится иерархия общерекурсивных (о.р.) операторов, тесно связанная с иерархией о.р. функционалов, рассмотренной в (1). Изучается изменение сложности о.р. операторов при выполнении простейших операций над ними. Это позволяет лучше исследовать начало иерархии, в частности, охарактеризовать о.р. операторы, попадающие на стандартный путь до ω^0 . Обсуждаются иерархия о.р. сводимостей и иерархия о.р. типов степеней невычислимости.

2. Частично-рекурсивный (ч.р.) оператор $T(\alpha)$ назовем общерекурсивным (о.р.), если он определен на всех одноместных всюду определенных теоретико-числовых функциях α и принимает на них в качестве значений также одноместные всюду определенные теоретико-числовые функции $\beta = T(\alpha)$.

По теореме о нормальной форме (2), любой ч.р. оператор можно представить в виде

$$T(\alpha)(x) = \psi(x, \bar{\alpha}(\mu s R(\bar{\alpha}(s), x))),$$

где ψ и R — двуместные о.р. функция и о.р. предикат.

В соответствии с таким представлением поставим в соответствие ч.р. оператору T его гёделевский номер $i = c(n, m)^*$, где n — гёделевский номер функции ψ (будем писать ψ_n), m — гёделевский номер предиката R (будем писать R_m). Оператор T с гёделевским номером i будем обозначать T_i .

3. Определения 1 и 2 близки к соответствующим определениям в (1).

Определение 1 (ср. (4)). Пусть i, j — гёделевские номера о.р. операторов. Число j назовем просто сигнализирующим для числа i , если для всех α и x выполняется неравенство

$$\mu s R_{r(i)}(\bar{\alpha}(s), x) \leq T_j(\alpha)(x).$$

Определение 2. Ч.р. функция φ называется y -характеристикой для числа i ($y \in O$, i — гёделевский номер о.р. оператора), если φ определена на всех $w \leq_o y$, дает на них гёделевские номера о.р. операторов, так что

1) $\varphi(0_o) = i$;

2) если $y = z +_o 1_o$, то φ есть z -характеристика для i и $\varphi(z +_o 1_o)$ — просто сигнализирующее для $\varphi(z)$;

3) если $y = 3 \cdot 5^e$, то для всех натуральных t φ есть $\{e\}(t_o)$ -характеристика для i и для каждой пары α, x $T_{\varphi(y)}(\alpha)(x) = c(v, n)$, где $v <_o y$ и $\mu s R_{r(\varphi(v))}(\bar{\alpha}(s), x) \leq n$.

В этом случае число $\varphi(y)$ будем называть y -сигнализирующим для числа i .

φ называется полной y -характеристикой для i , если она является y -характеристикой для i и $T_{\varphi(y)}(\alpha)(x)$ есть о.р. функция от x (не зависит от α).

* $c(n, m)$, $l(k)$, $r(k)$ — функции кодирования пар и обратного декодирования (см. (3)).

Построим классы C_y о.р. операторов, $y \in O$: $T \in C_y \Leftrightarrow$ существует полная y -характеристика для некоторого i такого, что $T = T_i$. Далее определим классы C_v о.р. операторов (v — конструктивный ординал):

$$C_v = \bigcup_{|y|=v} C_y, \quad y \in O.$$

Замечание. Между о.р. операторами и о.р. функционалами можно установить естественное взаимно однозначное соответствие.

Введем две операции над функцией α :

$$\begin{aligned} (\alpha \ominus \alpha(0))(t) &= \alpha(t+1), \\ (x \oplus \alpha)(t) &= \begin{cases} x, & t = 0, \\ \alpha(t-1), & t > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Каждому оператору T поставим в соответствие функционал

$$F(\alpha) = T(\alpha \ominus \alpha(0))(\alpha(0))$$

и, наоборот, каждому функционалу F — оператор $T(\alpha)(x) = F(x \oplus \alpha)$. Очевидно, что это соответствие взаимно однозначно. Это соответствие порождает другую иерархию о.р. операторов, непосредственно связанную с иерархией о.р. функционалов ⁽¹⁾. Будем обозначать классы о.р. операторов в этой иерархии символами C'_y и C'_v *.

Утверждение 1. 1) $C_y \subset C'_y$, $C_v \subset C'_v$;

$$2) C'_y \subset C_{y+o_{10}}, \quad C'_v \subset C_{v+1}.$$

Следствие. Из этих соотношений и результатов работы ⁽¹⁾ об иерархии о.р. функционалов следует, что построенная в этой работе иерархия о.р. операторов полна, невырождена, неоднозначна.

4. Справедлива также теорема об универсальном операторе.

Определение 3. О.р. оператор $U(\alpha)$ будем называть универсальным для класса K одноместных о.р. операторов, если для каждого оператора $T \in K$ найдется о.р. функция f такая, что $T(\alpha) \equiv U(\langle f, \alpha \rangle)$, и, наоборот, для любой фиксированной о.р. функции f о.р. оператор $\lambda \alpha U(\langle f, \alpha \rangle) \in K$.

Введем обозначения:

$$K_y = \bigcup_{z <_O y} C_z, \quad K_v = \bigcup_{\mu <_v} C_\mu.$$

Теорема 1. Существует примитивно-рекурсивная функция $g(y)$ такая, что, если $y \in O$, то $g(y)$ — гёделевский номер о.р. оператора $T_{g(y)}$ -универсального для класса K_y , при этом $T_{g(y)} \in C_{y+o_{10}}$, если y — обозначение предельного ординала, и в противном случае $T_{g(y)} \in C_{z+o_{(2n-1)0}}$, где z и n соответствуют разложению $y = z + o_n$ (z — обозначение предельного ординала).

Для дальнейшего нам потребуется одно свойство универсального оператора.

Теорема 2. Пусть $y, z \in O$ и $|y| = |z|$. Тогда для любого о.р. оператора $T \in K_z$ найдется гиперарифметическая функция h такая, что $T(\alpha) \equiv T_{g(y)}(\langle h, \alpha \rangle)$; здесь g — функция из теоремы 1.

5. Следующая теорема показывает, как меняется сложность о.р. операторов при выполнении над ними простейших операций (сумма операторов, слабая суперпозиция операторов, слабая итерация операторов, суперпозиция операторов).

* Можно было бы именно эту иерархию о.р. операторов взять за основную, но тогда некоторые результаты, в частности теорема 3, формулировались бы сложнее.

Теорема 3. Пусть $T^1 \in C_{y_1}, T^2 \in C_{y_2}, y_1, y_2 \in O$. Тогда

а) $T = T^1 + T^2 \in C_{y_1 + o y_2}$;

б) $T(\alpha)(x) = T^1(\alpha)(T^2(\alpha)(x)) \in C_{y_1 + o y_2}$;

в) $T(\alpha) = [T^1(\alpha)]^I \in C_{y_1 \cdot o \omega_0}$; здесь I — символ итерации, ω_0 — стандартное обозначение ординала ω ;

г) $T(\alpha) = T^1(T^2(\alpha)) \in C_{y_2 \cdot o y_1}$.

Рассмотрим теперь подробнее начало иерархии (до уровня ω^ω).

Ординалу вида $\omega^n a_n + \omega^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_0$ поставим в соответствие обозначение кортежа $a = \langle a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \rangle$. Скажем, что пусть Z в O , идущий до ω^ω , стандартный, если существует ч.р. функция φ , отображающая множество всех обозначений кортежей на множество всех $z \in Z$ так, что для всех обозначений кортежей выполняется соотношение

$$|\varphi(\langle a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \rangle)| = \omega^n a_n + \omega^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_0.$$

Определение 4 (ср. (4)). Оператор $T(\alpha)$ называется постовским, если он примитивно-рекурсивен относительно какой-нибудь о.р. функции f (т.е. $T(\alpha) \equiv T'(f, \alpha)$, где T' — примитивно-рекурсивный оператор, а f — фиксированная о.р. функция).

Обозначим через Π множество всех постовских операторов.

Теорема 4. На любом стандартном пути Z до ω^ω помещаются все постовские операторы и только они, т.е. $\bigcup_{v \in Z} C_v = \Pi$.

(Иерархия постовских операторов на стандартном пути до ω^ω напминает классификации Акста и Гжегорчика (см. (6, 7)) примитивно-рекурсивных функций (только классификация постовских операторов более мелкая).)

Доказательство теоремы опирается, с одной стороны, на пункты а) — в) теоремы 3, с другой стороны, на следующее утверждение 2 о нормальной характеристике. y -Характеристика φ для числа i называется нормальной, если в определении 2, п. 3) y -характеристики накладывается дополнительное ограничение на число v : $v = \{e\}(r_0)$ для некоторого r .

Утверждение 2. Существует примитивно-рекурсивная функция $h(y, k)$ такая, что если $y \in O$ и k — гёделевский номер полной y -характеристики для i , то $h(y, k)$ — гёделевский номер нормальной полной y -характеристики для i .

6. На основе иерархии о.р. операторов можно рассмотреть иерархию о.р. сводимостей.

Пусть α, β — две одноместные всюду определенные теоретико-числовые функции. Будем говорить, β y -сводится к α (β v -сводится к α) и писать: $\beta \leq_y \alpha$ ($\beta \leq_v \alpha$), если существует о.р. оператор T такой, что $T \in K_y$ ($T \in K_v$) и $T(\alpha) = \beta$.

Следующая теорема устанавливает невырожденность этой иерархии.

Теорема 5. Для любого $y \in O$ существуют две гиперарифметические функции α и β такие, что $\beta \leq_{y+o 1_0} \alpha$ (если y — обозначение предельного ординала) или $\beta \leq_{z+o(2n-1)_0} \alpha$ (если $y = z + o n_0$, где z — обозначение предельного ординала), но для любого $v < |y|$ $\beta \not\leq_v \alpha$.

Теорема 2 дает возможность применить диагональный метод для доказательства этой теоремы.

7. Различные о.р. сводимости можно связать с различными о.р. типами степеней невычислимости. Чтобы какое-то отношение сводимости можно было взять за основу некоторого типа степеней, необходимо и достаточно, чтобы это отношение было рефлексивным и транзитивным. Это требование указывает следующий путь построения иерархии о.р. типов степеней невычислимости. Рассмотрим отношение сводимости $\leq_v$ лишь для таких конструктивных ординалов v , для которых $v_1, v_2 < v \Rightarrow v_1 \cdot v_2 < v$ (будем называть такие ординалы v идемпотентными). Из теоремы 3г) следует, что для таких v отношение сводимости $\leq_v$ транзитивно. Каждому идемпотентному конструктивному ординалу v (отноше-

нию сводимости $\leq_v$) сопоставим соответствующий о.р. тип степеней невычислимости.

Утверждение 3. *Существует примитивно-рекурсивная функция $h(y)$, отображающая O в O такая, что функция $|h(y)|$ отображает O на множество всех идемпотентных конструктивных ординалов и при этом*

$$\begin{aligned} |y_1| = |y_2| &\Rightarrow |h(y_1)| = |h(y_2)|, \\ |y_1| > |y_2| &\Rightarrow |h(y_1)| > |h(y_2)|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что множество всех идемпотентных конструктивных ординалов подобно множеству всех конструктивных ординалов. Таким образом, построена некоторая невырожденная иерархия о.р. типов степеней невычислимости, идущая по всем конструктивным ординалам.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Мучнику, А. Г. Драгалину и Н. Н. Непейвода за обсуждение результатов и полезные советы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. Д. Стригин, ДАН, 210, № 2 (1973). ² С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., 1954, стр. 259. ³ А. И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965. ⁴ Б. А. Трахтенброт, Уч. зап. Пензенск. гос. пед. инст., 4, 75 (1956). ⁵ S. C. Kleene, Bull. Am. Math. Soc., 61, № 3, 193 (1955). ⁶ П. Акст, Сборн. Проблемы математической логики, М., 1970, стр. 114. ⁷ А. Гжегорчик, Сборн. Проблемы математической логики, М., 1970, стр. 9.