**Доклады Академии наук СССР**
**1972. Том 205, № 6**

УДК 550.384 — *ГЕОФИЗИКА*

Б. Л. ГАВРИЛИН, А. С. МОНИН

# О ВОЗМОЖНОСТЯХ РАСЧЕТА ЭВОЛЮЦИИ ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 II 1972)*

Магнитное поле $\mathbf{H}$ в движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно неподвижной системы отсчета электропроводящей жидкости (с коэффициентом электропроводности $\sigma$, который мы здесь для простоты считаем постоянным) удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \nu_m \Delta \mathbf{H}, \tag{1}$$

где $\nu_m = c^2 / (4\pi\sigma)$ — коэффициент магнитной вязкости ($c$ — скорость света). (Это уравнение применимо, в частности, к жидкому внешнему слою земного ядра.) Кроме того, магнитное поле бездивергентно (поперечно) и потому может быть выражено через два скалярных поля, так что векторное уравнение (1) имеет только две независимые проекции.

В целях демонстрации механизма эволюции магнитного поля изберем удобное для сферической геометрии представление $\mathbf{H}$ через два скалярных поля $T$ и $P$ по часто применяющейся для описания геомагнитного поля формуле

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}(T\mathbf{r}) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(P\mathbf{r}), \tag{2}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор. Первое слагаемое здесь называется тороидальной, а второе — полоидальной компонентной магнитного поля.

Формулу (2) можно переписать также в виде

$$\mathbf{H} = \nabla T \times \mathbf{r} + \nabla \frac{\partial rP}{\partial r} - \mathbf{r}\Delta P = \frac{1}{r}\nabla_h T \times \mathbf{r} + \frac{1}{r}\nabla_h \frac{\partial rP}{\partial r} - \frac{\Delta_h P}{r^2}\mathbf{r}, \tag{3}$$

где $\nabla_h$ и $\Delta_h = \nabla_h^2$ — двумерные градиент и лапласиан на поверхности единичной сферы соответственно. Поля $T$ и $P$ могут быть выражены через поле $\mathbf{H}$ как решения уравнений

$$\Delta_h T = -(\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{H}), \qquad \Delta_h P = -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}), \tag{4}$$

откуда видно, что поле $\mathbf{H}$ вполне определяется радиальными компонентами его самого и поля электрического тока $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{r}\quad\mathbf{H}$.

При помощи (3) из (1) получаются следующие эволюционные уравнения для скалярных полей $T$ и $P$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r}(\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h T) - \nu_m \frac{\Delta_h T}{r^2} = \frac{1}{r^2}\left(\mathbf{v}_h \times \nabla_h \frac{\partial rP}{\partial r}\right)_r, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \Delta_h P}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\mathbf{v}_h \Delta_h P + v_r \nabla_h \frac{\partial rP}{\partial r}\right) - \nu_m \Delta\Delta_h P = (\nabla_h T \times \nabla_h v_r)_r, \tag{6}$$

где индексами $r$ и $h$ отмечаются радиальные и горизонтальные (т. е. ортогональные $\mathbf{r}$) проекции векторов соответственно. Правая часть уравнения (5) описывает генерацию (или поглощение) тороидального поля полоидальным, возможную благодаря горизонтальным движениям жидкости. Аналогично правая часть уравнения (6) описывает генерацию (или поглощение) полоидального поля тороидальным, возможную благодаря вертикальным движениям; при осесимметричных (т. е. не зависящих от долготы) полях $v_r$ и $T$ она исчезает и, поскольку без возбуждения полем $T$ поле $P$ будет затухать из-за магнитной вязкости, самовозбуждение магнитного поля в указанном осесимметричном случае невозможно (теорема Каулинга). Типичное время взаимодействий полей $T$ и $P$ имеет порядок $r(v_h v_r)^{-1/2}$; для земного ядра при $(v_h v_r)^{1/2} \sim 10^{-2}$ см/сек оно получается порядка $10^3$ лет.

Буллард и Геллман [1] рассмотрели стационарное решение уравнений (5), (6) при $\nu_m = 0$ относительно полей $T$ и $P$, представленных только несколькими младшими сферическими гармониками, при поле скорости заданной формы (комбинация зонального течения и нескольких регулярных конвективных ячеек); типичное отношение скоростей в зональном течении и ячейках играло роль собственного значения. Оно оказалось положительным, что доказало существование стационарного самовозбуждающегося динамо в этой модели. Однако поле скорости надо не задавать, а рассчитывать из уравнений магнитной гидродинамики.

Полная система уравнений магнитной гидродинамики содержит три производных по времени от компонент поля скорости, две — от независимых компонент магнитного поля и по одной — от полей плотности жидкости $\rho$ и энтропии $s$. Согласно работе [2], три из этих семи производных по времени ответственны за медленные магнитогидродинамические процессы, а остальные четыре — за быстрые волновые процессы (акустические, гравитационные и магнитогидродинамические волны), причем медленные процессы, содержащие механизм генерации магнитного поля, описываются уравнениями

$$\frac{ds}{dt} = \varepsilon; \tag{7}$$

$$\rho \frac{d\mathscr{H}}{dt} = (\mathbf{H} \cdot \nabla\varepsilon) + \nu_m (\Delta\mathbf{H} \cdot \nabla s), \quad \mathscr{H} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{H} \cdot \nabla s); \tag{8}$$

$$\rho \frac{d\Omega}{dt} = (\operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \nabla\varepsilon) + (\operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \nabla s), \quad \Omega = \frac{1}{\rho} (\operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \nabla s), \tag{9}$$

где $\varepsilon$ — скорость притока тепла к единице массы жидкости, деленная на температуру, а $\mathbf{f}$ — сумма силы вязкости и пондеромоторной силы $\frac{1}{4\pi\rho} \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}$. Уравнение (7) есть просто уравнение притока тепла, а (8) и (9) суть точные следствия уравнений магнитной гидродинамики. Величину $\mathscr{H}$ можно назвать *зарядом магнитного поля*, а $\Omega$ — *потенциальным вихрем*.

С помощью (3) для $\mathscr{H}$ получается формула

$$r\rho\mathscr{H} = (\nabla_h s \times \nabla_h T)_r + \frac{1}{r} \left( \nabla_h s \cdot \nabla_h \frac{\partial rP}{\partial r} \right) - \frac{\partial s}{\partial r} \Delta_h P, \tag{10}$$

из которой видно, в частности, что если поле энтропии мало отклоняется от центрально-симметричного поля $s_0(r)$, то тороидальное магнитное поле может вносить в $\mathscr{H}$ вклад, не малый по сравнению с вкладом полоидального поля, лишь когда оно сильнее последнего по меньшей мере в $s_0 / |s - s_0|$ раз. Такие условия, по-видимому, имеют место в земном ядре.

По идее работы [2], при описании медленных магнитогидродинамических процессов целесообразно упростить систему уравнений магнитной гидродинамики так, чтобы упрощенная система достаточно точно описывала медленные процессы, но не содержала бы в числе своих решений быстрых волновых процессов, т. е. последние были бы отфильтрованы. Такое упрощение осуществляется, если разложить магнитогидродинамические поля в асимптотические ряды по степеням малого параметра — числа Маха (т. е. отношения типичных скоростей движения жидкости и распространения наиболее медленных возможных волн) и оставить в полученных разложениях лишь главные члены относительно этого малого параметра. Уравнения для медленных процессов (7) — (9) при этом существенно не меняются, в остальных же эволюционных уравнениях магнитной гидродинамики (для ортогональных $\nabla s$ компонент полей $\mathbf{H}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{v}$, для $\operatorname{div} \mathbf{v}$ и для $\rho$) отбрасываются слагаемые с производными по времени (и некоторые другие слагаемые такого же порядка малости), так что эти четыре уравнения превращаются в синхронные соотношения между магнитогидродинамическими полями, которые и отфильтровывают быстрые волновые процессы.

Уравнение неразрывности при этом превращается в условие бездивергентности поля скорости медленных движений (отфильтровывающее акустические волны); тогда эволюционное уравнение для $\operatorname{div} \mathbf{v}$ автоматически превращается в синхронное соотношение. Эволюционное уравнение для ортогональной $\nabla s$ компоненты $\mathbf{H}_n$ магнитного поля имеет одну независимую проекцию; выбирая в качестве таковой проекцию на $\nabla s$, мы можем записать ее в виде

$$(\mathbf{e} \cdot d\mathbf{H}_n / dt) = -(\mathbf{H}_n \cdot d\mathbf{e} / dt), \qquad \mathbf{e} = \nabla s / |\nabla s|. \tag{11}$$

Пренебрегая здесь левой частью, получаем синхронное соотношение для магнитного поля, которое отфильтровывает магнитогидродинамические волны; оно может быть приведено к виду

$$(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{e} / dt) = 0. \tag{12}$$

Совершенно аналогичный (11) вид имеет эволюционное уравнение для ортогональной $\nabla s$ компоненты поля $\operatorname{rot} \mathbf{v}$. В применении к Земле в нем целесообразно пренебрегать производной по времени лишь от вихря скорости движений относительно вращающейся вместе с Землей (с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$) системы отсчета, и соответствующее синхронное соотношение будет иметь вид

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{e} / dt) = 2(\boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{e} / dt). \tag{13}$$

Указанные четыре синхронных соотношения вместе с термодинамической формулой для энтропии $s = s(p, \rho)$ в принципе позволяют определять поля $\rho$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{H}$ по полям $s$, $\rho\mathscr{H}$, $\rho\Omega$ и $\varepsilon$ в тот же момент времени и, следовательно, осуществлять интегрирование уравнений (7) — (9) шагами по времени. При этом $d\mathbf{e} / dt$ вычисляется по вытекающей из (7) формуле

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{1}{|\nabla s|} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} - e_i e_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\alpha} \right) - e_\beta \left( \frac{\partial v_\beta}{\partial x_i} - e_i e_\alpha \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right), \tag{14}$$

справедливой в любых декартовых координатах.

Институт океанологии им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
3 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. C. Bullard, H. Gellman, Phil. Trans. Roy. Soc. A, **247**, 213 (1954). [2] А. С. Монин, ДАН, **200**, № 1, 91 (1971).