

УДК 517.512

МАТЕМАТИКА

В. В. ЖУК, Г. И. НАТАНСОН

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ И РОСТ ПРОИЗВОДНЫХ ПРИБЛИЖАЮЩИХ ПОЛИНОМОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 25 XII 1972)

Рассматривается задача: определить структурные свойства функции по известной скорости роста производных некоторых приближающих агрегатов этой функции. Первые результаты здесь получены Г. Харди и Дж. Литтлвудом ((¹), см. также (²), стр. 419). В дальнейшем эта задача рассматривалась в статьях (³⁻⁶) (см. также (²), стр. 469). В настоящей работе установлены оценки модулей непрерывности различных порядков функции и ее производных через нормы производных полиномов наилучшего приближения, сумм Фейера и Пуассона.

Условимся об обозначениях. $\tilde{C}$ — пространство вещественных непрерывных 2π -периодических функций f с нормой $\|f\| = \max_x |f(x)|$. $\tilde{L}_p$, $1 \leq p < \infty$, — пространство вещественных 2π -периодических функций, суммируемых с p -й степенью на $[0, 2\pi]$, с нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$; $\tilde{L}_\infty = \tilde{C}$. $\beta = p$, если $1 \leq p \leq 2$, $\beta = 2$, если $2 < p < \infty$, $\beta = 1$, если $p = \infty$.

$$\omega_r(f, \delta)_p = \sup_{|h| \leq \delta} \left\| \sum_{v=0}^r (-1)^v \binom{r}{v} f(x + vh) \right\|_p, \quad \omega_r(f, \delta) = \omega_r(f, \delta)_\infty.$$

$T_n = T_n(f)$ — тригонометрический полином наилучшего приближения функции f порядка n в $\tilde{C}$. $E_n(f) = \|f - T_n\|$. $s_n(f) = \sum_{k=0}^n A_k(f)$ — n -я частная сумма тригонометрического ряда Фурье функции f .

$$\sigma_n(f) = (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^n s_k(f), \quad P_\rho(f) = \sum_{k=0}^\infty \rho^k A_k(f).$$

N — множество натуральных чисел.

Теорема 1. Пусть $f \in \tilde{C}$; $m+1, r, n \in N$; $\gamma \geq 2$. Тогда, если

$$\sum_{k=1}^\infty k^{-r-1} \|T_k^{(r+m)}(f)\| < \infty,$$

то существует $f^{(m)} \in \tilde{C}$ и

$$\omega_r(f^{(m)}, \gamma/n) \leq 2^{2m+2} \pi (4\gamma)^r \sum_{k=n+1}^\infty k^{-r-1} \|T_k^{(r+m)}(f)\|.$$

Доказательство. Подберем целое μ так, что $2^{\mu-1} < n \leq 2^\mu$, и пусть $k_\nu \in N$ таково, что

$$k_\nu^{-r} \|T_{k_\nu}^{(r+m)}\| \leq k^{-r} \|T_k^{(r+m)}\|, \quad k, k_\nu \in [2^\nu + 1, 2^{\nu+1}].$$

Предположим, что существует $f^{(m)} \in \mathcal{C}$. Тогда

$$\begin{aligned}\omega_r(f^{(m)}, \gamma/n) &\leq \omega_r(f^{(m)} - T_{k_\mu}^{(m)}, \gamma/n) + \omega_r(T_{k_\mu}^{(m)}, \gamma/n) \leq \\ &\leq 2^r \|f^{(m)} - T_{k_\mu}^{(m)}\| + (\gamma/n)^r \|T_{k_\mu}^{(r+m)}\|.\end{aligned}$$

Так как

$$E_{k_\nu}(f) \leq E_{k_\nu}(f - T_{k_{\nu+1}}) + E_{k_\nu}(T_{k_{\nu+1}}) \leq E_{k_{\nu+1}}(f) + E_{k_\nu}(T_{k_{\nu+1}}),$$

то с помощью теоремы Ахиезера — М. Крейна — Фавара ⁽²⁾, стр. 590) найдем

$$E_{k_\nu}(f) - E_{k_{\nu+1}}(f) \leq \pi 2^{-1} (k_\nu + 1)^{-r} \|T_{k_{\nu+1}}^{(r)}\|.$$

Значит,

$$E_{k_\mu}(f) \leq \pi 2^{-1} \sum_{\nu=\mu}^{\infty} (k_\nu + 1)^{-r} \|T_{k_{\nu+1}}^{(r)}\|. \quad (1)$$

Пусть $m \geq 1$. Известно (см., например, ⁽²⁾, стр. 206), что $\|T_k^{(m)} - f^{(m)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Следовательно,

$$f^{(m)} - T_{k_\mu}^{(m)} = \sum_{\nu=\mu}^{\infty} (T_{k_{\nu+1}}^{(m)} - T_{k_\nu}^{(m)}).$$

Применяя неравенство Бернштейна, получим

$$\|f^{(m)} - T_{k_\mu}^{(m)}\| \leq \sum_{\nu=\mu}^{\infty} k_{\nu+1}^m \|T_{k_{\nu+1}} - T_{k_\nu}\| \leq 2 \sum_{\nu=\mu}^{\infty} k_{\nu+1}^m E_{k_\nu}(f).$$

В силу неравенства (1)

$$\begin{aligned}\|f^{(m)} - T_{k_\mu}^{(m)}\| &\leq \pi \sum_{\nu=\mu}^{\infty} k_{\nu+1}^m \sum_{i=\nu}^{\infty} (k_i + 1)^{-r-m} \|T_{k_{i+1}}^{(r+m)}\| = \\ &= \pi \sum_{i=\mu}^{\infty} \left(\sum_{\nu=\mu}^i k_{\nu+1}^m \right) (k_i + 1)^{-r-m} \|T_{k_{i+1}}^{(r+m)}\|.\end{aligned}$$

Но $\sum_{\nu=\mu}^i k_{\nu+1}^m \leq 2^{2m+1} (k_i + 1)^m$. Поэтому

$$\|f^{(m)} - T_{k_\mu}^{(m)}\| \leq 2^{2m+1} \pi \sum_{i=\mu}^{\infty} (k_i + 1)^{-r} \|T_{k_{i+1}}^{(r+m)}\|.$$

Последнее соотношение в силу (1) верно и при $m = 0$. Имеем далее

$$\omega_r(f^{(m)}, \gamma/n) \leq 2^{r+2m+1} \pi \sum_{i=\mu}^{\infty} (k_i + 1)^{-r} \|T_{k_{i+1}}^{(r+m)}\| + \gamma^r (k_\mu/n)^r k_\mu^{-r} \|T_{k_\mu}^{(r+m)}\|.$$

Ясно, что $k_{i+1} / (k_i + 1) < 4$, $k_\mu / n < 4$. Значит,

$$\begin{aligned}\omega_r(f^{(m)}, \gamma/n) &\leq 2^{3r+2m+1} \pi \sum_{i=\mu}^{\infty} k_{i+1}^{-r} \|T_{k_{i+1}}^{(r+m)}\| + \\ &+ (4\gamma)^r k_\mu^{-r} \|T_{k_\mu}^{(r+m)}\| \leq 2^{2m+1} \pi (4\gamma)^r \sum_{i=\mu}^{\infty} k_i^{-r} \|T_{k_i}^{(r+m)}\|.\end{aligned}$$

Легко видеть, что $k_i^{-r} \|T_{k_i}^{(r+m)}\| \leq 2 \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} k^{-r-1} \|T_k^{(r+m)}\|$. Таким образом,

$$\omega_r(f^{(m)}, \gamma/n) \leq 2^{2m+2} \pi (4\gamma)^r \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r-1} \|T_k^{(r+m)}\|.$$

Осталось доказать, что при $m \geq 1$ существует $f^{(m)} \in \mathcal{C}$. Из хода доказательства видно, что сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r-1} \|T_k^{(r+m)}\|$ влечет сходимость

$\sum_{k=1}^{\infty} k^{m-1} E_k(f)$. Очевидно, что из сходимости последнего ряда следует сходимость

$\sum_{k=1}^{\infty} k^{m-1} E_k(f)$. По известной теореме Бернштейна отсюда вытекает существование и непрерывность $f^{(m)}$.

Замечание. При доказательстве мы не использовали специфики пространства $\mathcal{C}$. Поэтому аналогичное утверждение (с той же константой) верно в пространствах $\mathcal{L}_p$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 2. Пусть $f \in \mathcal{L}_p$, $1 < p < \infty$, $r, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\omega_r(f, 1/n)_p \leq C(r, p) \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r\beta-1} \|s_k^{(r)}(f)\|_p^\beta \right\}^{1/\beta}, \quad (2)$$

где $C(r, p)$ зависит только от r и p .

Доказательство. Очевидно, что

$$\omega_r(f, 1/n)_p \leq 2^r \|f - s_n(f)\|_p + n^{-r} \|s_n^{(r)}(f)\|_p. \quad (3)$$

Применяя теорему Литливуда — Пэли (1), стр. 335), получим

$$\|f - s_n(f)\|_p \leq C_1(p) \left\| \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} (s_{2^{\mu+1}n}(f) - s_{2^{\mu}n}(f))^2 \right\}^{1/2} \right\|_p.$$

При $1 < p \leq 2$ отсюда следует

$$\|f - s_n(f)\|_p \leq C_1(p) \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} \|s_{2^{\mu+1}n}(f) - s_{2^{\mu}n}(f)\|_p^2 \right\}^{1/p}.$$

Если же $p > 2$, то

$$\|f - s_n(f)\|_p \leq C_1(p) \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} \|s_{2^{\mu+1}n}(f) - s_{2^{\mu}n}(f)\|_p^2 \right\}^{1/2}.$$

Итак, при всех $p \in (1, \infty)$ будет

$$\|f - s_n(f)\|_p \leq C_1(p) \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} \|s_{2^{\mu+1}n}(f) - s_{2^{\mu}n}(f)\|_p^\beta \right\}^{1/\beta}.$$

В силу теорем М. Рисса (2), стр. 423) и Д. Джексона имеем

$$\begin{aligned} \|s_{2^{\mu+1}n}(f) - s_{2^{\mu}n}(f)\|_p &= \|s_{2^{\mu+1}n}(f) - s_{2^{\mu}n}[s_{2^{\mu+1}n}(f)]\|_p \leq \\ &\leq C_2(p) E_{2^{\mu}n}[s_{2^{\mu+1}n}(f)]_p \leq C_3(p) (2^{\mu}n)^{-r} \|s_{2^{\mu+1}n}^{(r)}(f)\|_p. \end{aligned}$$

Значит,

$$\|f - s_n(f)\|_p \leq C_4(p) \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} (2^{\mu}n)^{-r\beta} \|s_{2^{\mu+1}n}^{(r)}(f)\|_p^\beta \right\}^{1/\beta}.$$

При $k \geq 2^{\mu}n$ будет

$$\|s_{2^{\mu}n}^{(r)}(f)\|_p = \|s_{2^{\mu}n}[s_k^{(r)}(f)]\|_p \leq C_5(p) \|s_k^{(r)}(f)\|_p.$$

Следовательно,

$$\|s_{2^{\mu}n}^{(r)}(f)\|_p \leq C_6(p) (2^{\mu}n)^{-1} \sum_{k=2^{\mu}n+1}^{2^{\mu+1}n} \|s_k^{(r)}(f)\|_p^\beta. \quad (4)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|f - s_n(f)\|_p &\leq C_7(p) \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} (2^\mu n)^{-r\beta-1} \sum_{k=2^\mu+1}^{2^\mu+2n} \|s_k^{(r)}(f)\|_p^\beta \right\}^{1/\beta} \\ &\leq C_8(p) 2^{2r} \left\{ \sum_{k=2n+1}^{\infty} k^{-r\beta-1} \|s_k^{(r)}(f)\|_p^\beta \right\}^{1/\beta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Сопоставляя формулы (3), (4) при $\mu = 0$ и (5), получаем

$$\omega_r(f, 1/n)_p \leq C_9(p) 2^{2r} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r\beta-1} \|s_k^{(r)}(f)\|_p^\beta \right\}^{1/\beta}. \quad (6)$$

Положим $\lambda_v = (2n+1) / (2n+1-v)$ при $0 \leq v \leq n$, $\lambda_v = 0$ при $v > n$.

Ясно, что $|\lambda_v| \leq 3$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_v - \lambda_{v+1}| \leq 3$.

Отсюда на основании теоремы И. Марцинкевича ((⁷), стр. 346) получаем

$$\|s_n(f)\|_p = \left\| \sum_{v=0}^{\infty} \lambda_v A_v [\sigma_{2n}(f)] \right\|_p \leq C_{10}(p) \|\sigma_{2n}(f)\|_p. \quad (7)$$

Из формул (6), (7) вытекает требуемое.

З а м е ч а н и е. В. В. Жуком было показано, что неравенство (2) справедливо при $p = 1$ и $p = \infty$. Сходным методом доказывается

Теорема 3. Пусть $f \in \tilde{L}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $r \in N$, $\delta \in (0, 1]$. Тогда

$$\omega_r(f, \delta)_p \leq C(r, p) \left\{ \int_{1-\delta}^1 (1-\rho)^{r\beta-1} \|P_\rho^{(r)}(f)\|_p^\beta d\rho \right\}^{1/\beta},$$

где $C(r, p)$ зависит только от r и p .

З а м е ч а н и я. 1) В. В. Жук установил обратное неравенство

$$\|P_\rho^{(r)}(f)\|_p \leq C(r) (1-\rho)^{-r} \omega_r(f, 1-\rho)_p,$$

где $1 \leq p \leq \infty$, $r \in N$, $C(r)$ зависит только от r , $\rho \in [0, 1]$, $f \in \tilde{L}_p$.

2) Случай $r = 1$ рассматривался также в (³).

3) Теорема 3 может быть получена также и путем сопоставления приведенных выше результатов и установленного Г. И. Натансоном неравенства

$$\|\sigma_{n^{-1}}(f)\|_p \leq (1+\varepsilon) \|P_{1-n^{-1}}(f)\|_p.$$

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
19 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. H. Hardy, I. E. Littlewood, Math. Zs., 34, 403 (1931—1932). ² А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1, М., 1965. ³ Ю. А. Брудный, И. Е. Гопенгауз, Матем. сборн., 52, 891 (1960). ⁴ P. L. Butzer, S. Pawelke, Acta sci. math., 28, 173 (1967). ⁵ G. Sunouchi, Jahresber. Dtsch., 70, 165 (1968). ⁶ P. L. Butzer, K. Scherer, Aequat. math., 3, 170 (1969). ⁷ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 2, М., 1965.