Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. П. ТЕР-ЗАХАРЯН

О ЯЗЫКЕ МНОГОМЕСТНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 17 VII 1972)

В заметке рассматриваются вопросы оптимального кодирования сообщений в языке многоместных рекурсивных функций. Аналогичное исследование для одноместных рекурсивных функций было проведено в ([1]). Изучение соответствующих вопросов для языка многоместных рекурсивных функций оказывается связанным с более сложными рассмотрениями, в частности, требует установления некоторых общих утверждений, касающихся асимптотической оптимальности алгорифмических языков, а также специального аналитического аппарата.

Далее мы используем понятия и терминологию работ ([1], [2]). Напомним, что натуральные числа понимаются как слова в алфавите $\{0, 1\}$.

Обозначим через A_r алфавит $\{0, 1, ,] , [\}$. Мы дадим индуктивное определение слов типа R, причем вместе с этим определением дадим индуктивное определение размерности слов типа R:

1) $[\ ]$ есть слово типа R размерности 1;

2) для всяких натуральных чисел n и q $[0, n, q]$ и $[1, n, q]$ суть слова типа R размерности n;

3) пусть P — слово типа R размерности j, и пусть $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$ — слова типа R размерностей соответственно $i_1, i_2, \ldots, i_l$; тогда $[00, P, Q_1, \ldots \ldots, Q_l]$ — слово типа R размерности i_1;

4) пусть P — слово типа R размерности n, Q — слово типа R размерности m, тогда $[01, P, Q]$ есть слово типа R размерности $(n+1)$;

5) пусть P — слово типа R размерности $(n+1)$, тогда $[10, P]$ — слово типа R размерности n.

Через $C^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $n \geqslant 2$, как и в (3), обозначим функции, определяемые следующими рекуррентными отношениями:

$$C^2(x_1, x_2) = \frac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + 1)}{2} + x_1,$$
$$C^n(x_1, \ldots, x_n) = C^2(x_1, C^{n-1}(x_2, \ldots, x_n)).$$

Через $C_i^n(m)$ (при $1 \leqslant i \leqslant n$, $n \geqslant 2$) обозначим функции такие, что всегда если $m = C^n(x_1, \ldots, x_n)$, то $C_i^n(m) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть Δ — множество всех слов типа R, V — нигде не определенный нормальный алгорифм (н.а.) в алфавите $A_0^{\text{са}}$. Построим н.а. W в алфавите $A_r^{\text{са}}$ со следующими свойствами:

1) $W([\ ] \square m) \simeq m + 1$;

2) $W([0, n, q] \square m) \simeq q$;

3) $W([1,\ n,\ q] \square m) \simeq \begin{cases} C_q^n(m), & \text{если } 1 \leqslant q \leqslant n, \\ V(m) & \text{в противном случае;} \end{cases}$

4) если P — слово типа R размерности j, Q_k — слово типа R размерности i_k, $k = 1, \ldots, l$, то

$$W([00,\ P,\ Q_1, \ldots,\ Q_l] \square m) \simeq$$
$$\simeq \begin{cases} W(P \square C^l(W(Q_1 \square m), \ldots,\ W(Q_l \square m))), & \text{если } j = l \,\&\, i_1 = i_2 = \ldots = i_l, \\ V(m) & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

5) если P — слово типа R размерности n, Q — слово типа R размерности q, то

$$W([01, P, Q] \square m) \simeq$$

$$\simeq \begin{cases} V(m), & \text{если } q \neq n+2, \\ W(P \square C^n(C_2^{n+1}(m), \ldots, C_{n+1}^{n+1}(m))), & \text{если } q = n+2 \,\&\, C_1^{n+1}(m) = 0, \\ W(Q \square C^{n+2}(C_1^{n+1}(m) \dot{-} 1, C_2^{n+1}(m), \ldots, C_{n+1}^{n+1}(m), W([01, P, Q] \square & \\ \square\, C^{n+1}(C_1^{n+1}(m) \dot{-} 1, C_2^{n+1}(m), \ldots, C_{n+1}^{n+1}(m))))), & \\ \text{если } q = n+2 \,\&\, C_1^{n+1}(m) \neq 0; & \end{cases}$$

6) если P — слово типа R размерности $(n+1)$, то

$$W([10P] \square m) \simeq \mu q(W(P \square C^2(q, m)) \simeq 0).$$

Список $\{0, 1\}$, Ar, Δ, W, элементы которого построены указанным образом, будем называть языком многоместных рекурсивных функций (я.м.р.ф.).

Теорема 1. *Я.м.р.ф. мультипликативно оптимален.*

Теорема 2. *Я.м.р.ф. не асимптотически оптимален.*

Доказательство этого утверждения основывается на некоторой общей теореме, для формулировки которой нам потребуется одно дополнительное

Определение. Пусть $Я_1 \rightleftharpoons \langle A_j, A_i, \Omega_1, U\rangle$ и $Я_2 \rightleftharpoons \langle A_j, A_i, \Omega_2, U\rangle$ — два алгорифмических языка. $Я_2$ будем называть подъязыком языка $Я_1$, если $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$ и для любого сообщения X языка $Я_1$ существует эквивалентное ему сообщение Y языка $Я_2$, такое, что длина Y не превосходит длины X.

Теорема 3. *Пусть $Я$ — некоторый алгорифмический язык, $Я_1$ — подъязык языка $Я$, н.а. $\mathfrak{A}$ (соответственно н.а. $\mathfrak{B}$) в алфавите A_0^{ca} перерабатывает каждое н.ч. n в натуральное число $\mathfrak{A}(n)$ (соответственно $\mathfrak{B}(n)$), являющееся количеством сообщений языка $Я$ (соответственно языка $Я_1$) длины n.*

Тогда, если существуют FR-*числа a и b такие, что*

1) $1 \leqslant b < a$,

2) $\forall n \exists m \forall k (k > m \supset \mathfrak{B}(k) < (b + 2^{-n})^k)$,

3) $\forall n \forall m \exists k (k > m \,\&\, \mathfrak{A}(k) > (a - 2^{-n})^k)$,

то язык $Я$ не асимптотически оптимален.

Применение теоремы 3 к доказательству теоремы 2 основывается на рассмотрении некоторых подъязыков я.м.р.ф., вводимых следующим образом. Пусть m — фиксированное положительное натуральное число. Сообщение я.м.р.ф. назовем m-правильным, если в него не входит слово

$$[00, [01, [1, 0, 0], [00, [\ ], [1, 00, 00]]], [0, 2^m - 1,],.$$

Обозначим через Δ_m множество всех m-правильных сообщений я.м.р.ф. Нетрудно убедиться в том, что при каждом $m > 0$ язык

$$Я_m \rightleftharpoons \langle\{0, 1\}, A_r, \Delta_m, W\rangle$$

является подъязыком я.м.р.ф.

Доказывается, что квазиосуществимо натуральное число m такое, что для $Я_m$ и я.м.р.ф. можно построить FR-числа a и b, удовлетворяющие всем условиям теоремы 3; отсюда следует утверждение теоремы 2.

Автор выражает глубокую благодарность И. Д. Заславскому за внимание к работе и советы.

Вычислительный центр
Академии наук АрмССР и
Ереванского государственного университета
Ереван

Поступило
11 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. П. Тер-Захарян, ДАН, 190, № 3, 538 (1970). [2] Н. А. Шанин, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 52, 226 (1958). [3] А. И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965.