

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, А. Д. ГАДЖИЕВ

О ПОРЯДКЕ СХОДИМОСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ — СТИЛЬТЪЕСА

1. Пусть Γ — замкнутая спрямляемая жорданова кривая длины l на плоскости комплексного переменного z . Обозначим через φ угол между положительным направлением оси абсцисс и касательной к Γ в данной точке, которая, очевидно, существует почти во всех точках кривой Γ . Пусть $f(s)$ — комплексная функция дуги s , имеющая ограниченную вариацию на отрезке $[0, l]$. Записывая параметрическое уравнение кривой Γ в виде $x = x(s)$, рассмотрим интеграл типа Коши — Стильтьеса ⁽¹⁾

$$K(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{i\varphi} df(s)}{x - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{e^{i\varphi(s)} df(s)}{x(s) - z}.$$

И. И. Приваловым ⁽¹⁾ было доказано, что разность значений интеграла типа Коши — Стильтьеса внутри и вне Γ стремится к $f'(s_0)$ для всех точек линии Γ , кроме, быть может, множества меры нуль, когда $z \rightarrow \Gamma$ (изнутри и извне). Этот же результат был доказан в работе ⁽²⁾ другим методом, основанным на свойствах сингулярных интегралов в действительной области.

В настоящей заметке с помощью методов теории сингулярных интегралов устанавливается порядок сходимости интегралов типа Коши и Коши — Стильтьеса.

2. Займемся сначала изучением скорости сходимости общих сингулярных интегралов типа Лебега — Стильтьеса в действительной области. Пусть $x \in [a, b]$, а λ — вещественный параметр, изменяющийся на некотором множестве Λ , имеющем точку сгущения λ_0 (конечную или бесконечную).

Рассмотрим линейный интегральный оператор

$$W_\lambda(f; x) = \int_a^b K_\lambda(x, t) df(t). \quad (1)$$

Мы будем предполагать, что ядро оператора (1) — функция $K_\lambda(x, t)$ — обладает горбатой мажорантой ⁽³⁾ $r_\lambda(t, x)$ $|K_\lambda(t, x)| \leq r_\lambda(t, x)$, причем функция $r_\lambda(t, x)$ при фиксированных $\lambda \in \Lambda$ и $x \in [a, b]$ монотонно возрастает в промежутке $[a, x]$ и монотонно убывает в $[x, b]$ как функция одного лишь t .

Введем функцию

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) & \text{при } t \neq x, \\ 0 & \text{при } t = x. \end{cases} \quad (2)$$

Если допустить, что функция $f(x)$ в (1) является функцией ограниченной вариации, то очевидно, что почти всюду на $[a, b]$ будет справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow x} \gamma(t) = 0.$$

Следующая теорема показывает, что скорость стремления к нулю функции $\gamma(t)$ оказывает существенное влияние на порядок сходимости операторов (1).

Теорема 1. Пусть ядро оператора (1) является стохастическим, т. е. при каждом фиксированном $x \in \Lambda$ и $x \in [a, b]$

$$\int_a^b K_\lambda(x, t) dt = 1,$$

а $f(t)$ — функция ограниченной вариации такая, что при некотором $x \in [a, b]$ интеграл (1) имеет смысл. Допустим также, что равномерно по $t \in [a, b] \setminus (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$,

$$r_\lambda(t, x) = o(\Delta_\lambda^{(\alpha)}), \quad (3)$$

где

$$\Delta_\lambda^{(\alpha)} = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |t-x|^\alpha r_\lambda(t, x) dt, \quad \alpha \geq 0, \quad (4)$$

а $r_\lambda(t, x)$ — горбатая мажоранта ядра $K_\lambda(t, x)$.

Если при некотором α и при $t \rightarrow x$

$$\gamma(t) = o(|t-x|^\alpha), \quad (5)$$

где $\gamma(t)$ определена равенством (2), то при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ справедливо соотношение

$$|W_\lambda(f; x) - f'(x)| = o(\Delta_\lambda^{(\alpha)})$$

во всех точках $x \in [a, b]$, в которых существует $f'(x)$ (т. е. почти всюду на $[a, b]$).

Мы наметим только общую схему доказательства этой теоремы. Очевидно, что можно считать $f(x)$ возрастающей функцией. Пусть, кроме того, $f'(x) = 0$ (общий случай легко приводится к этому). Из (2) находим, что $df(t) = d[\gamma(t) \cdot (t-x)]$.

Введем обозначение

$$J_\lambda(u, v) = \int_u^v K_\lambda(t, x) df(t).$$

Пользуясь условиями теоремы, нетрудно показать, что при $\delta > 0$

$$|J_\lambda(a, x - \delta)| = o(\Delta_\lambda^{(\alpha)}),$$

$$|J_\lambda(x - \delta, x)| \leq \varepsilon(\alpha + 1) \int_{x-\delta}^x (x-t)^\alpha r_n(t, x) dt,$$

$$|J_\lambda(x + \delta, b)| = o(\Delta_\lambda^{(\alpha)}),$$

$$|J_\lambda(x, x + \delta)| \leq \varepsilon(\alpha + 1) \int_x^{x+\delta} (t-x)^\alpha r_n(t, x) dt.$$

Пользуясь (3) и учитывая, что

$$W_\lambda(f, x) = J_\lambda(a, x - \delta) + J_\lambda(x - \delta, x) + J_\lambda(x, x + \delta) + J_\lambda(x + \delta, b),$$

получим требуемое.

Примечания. а) Аналогичная теорема для операторов (1), ядро которых не обладает горбатой мажорантой, была доказана ранее в работе (*). В этом случае в (3) и (4) вместо $r_\lambda(t, x)$ фигурирует само ядро $K_\lambda(t, x)$.

б) При $\alpha = 0$ из теоремы 1 вытекает в качестве следствия утверждение о сходимости операторов (1), доказанное в (*).

в) Если $f(x)$ — абсолютно непрерывная функция, то из (2) и (5) легко вывести, что

$$\left| \int_0^h [F(x+t) - F(x)] dt \right| = o(h^{\alpha+1}).$$

В этом случае из теоремы 1 можно получить соответствующие результаты о порядке сходимости общих сингулярных интегралов вида $\int_a^b F(t) K_\lambda(t, x) dt$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$.

3. Применим доказанную теорему к нахождению порядков сходимости сингулярных интегралов типа Коши — Стильтьеса. Следуя И. И. Привалову ⁽¹⁾, рассмотрим разность значений интеграла Коши — Стильтьеса внутри и вне Γ , допуская, что z лежит на некоторой прямой zx_0 , наклоненной к нормали в точке $x_0 = x(s_0)$ под углом $\psi_0 = \psi(s_0)$, на расстоянии ε от x_0 , т. е. $z_{1,2} = x_0 \pm i\varepsilon e^{i(\psi_0 + \psi_0)}$. Рассмотрим оператор

$$P_\varepsilon(s_0, \psi_0, f) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_\Gamma \frac{e^{i\varphi} df(s)}{x - z_1} - \int_\Gamma \frac{e^{i\varphi} df(s)}{x - z_2} \right].$$

Ясно, что

$$P_\varepsilon(s_0, \psi_0; f) = \int_0^l K_\varepsilon(s_0, s, \psi_0) df(s),$$

где

$$K_\varepsilon(s_0, s, \psi_0) = \frac{1}{2\pi i} e^{i\varphi(s)} \left[\frac{1}{x(s) - z_1} - \frac{1}{x(s) - z_2} \right].$$

Очевидно, что $K_\varepsilon(s_0, s, \psi_0)$ — стохастическое ядро.

Кроме того, в ⁽²⁾ показано, что ядро $K_\varepsilon(s_0, s, \psi_0)$ обладает горбатой мажорантой (см. также ⁽¹⁾)

$$r_\varepsilon(s_0, s, \psi_0) = \begin{cases} \frac{4}{\pi \varepsilon (1-q)} & \text{при } |s - s_0| < \varepsilon < h, \\ \frac{\varepsilon}{\pi (1-q) (V|s - s_0|^2 + \varepsilon^2 + |s - s_0|/3)^2} & \text{при } \varepsilon \leq |s - s_0| < h, \\ \frac{\varepsilon}{\pi \min_{|s-s_0| \geq h} (|x - z_1|, |x - z_2|)} & \text{при } h \leq |s - s_0|, \end{cases}$$

где $q < 1$, $h > \varepsilon > 0$.

В этом случае, очевидно, имеем

$$\Delta_\varepsilon^{(\alpha)} = \int_{s_0 - \varepsilon}^{s_0 + \varepsilon} |s - s_0|^\alpha r_\varepsilon(s_0, s, \psi_0) ds$$

и нетрудно показать, что $\Delta_\varepsilon^{(\alpha)} \sim \varepsilon^\alpha$.

Легко заметить также, что

$$r_\varepsilon(s_0, s, \psi_0) = o(\varepsilon^\alpha)$$

при $0 \leq \alpha < 1$, $s \in [0, l] \setminus (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$. Положим $f(s) = \sigma_1(s) + i\sigma_2(s)$,

$$\gamma_k(s) = \begin{cases} \frac{\sigma_k(s) - \sigma_k(s_0)}{s - s_0} & \text{при } s \neq s_0, \\ 0 & \text{при } s = s_0, \end{cases} \quad k = 1, 2.$$

Теорема 2. Если при $s \rightarrow s_0$ и при некотором α , $0 \leq \alpha < 1$, $|\gamma_k(s)| = o(|s - s_0|^\alpha)$, $k = 1, 2$, то равномерно на всяком сегменте $|\psi_0| \leq \pi\theta/2$, $0 \leq \theta < 1$, справедливо соотношение

$$|P_\varepsilon(s_0, \psi_0; f) - f'(s_0)| = o(\varepsilon^\alpha).$$

Из этой теоремы в качестве следствия вытекает при $\alpha = 0$ теорема И. И. Привалова (¹).

Если функция $f(s)$ абсолютно непрерывна, то интеграл типа Коши — Стильтьеса превращается в интеграл типа Коши. Обозначая через $P_\varepsilon(s_0, \psi_0, f)$ аналог оператора P_ε для интеграла типа Коши ($F(x(s)) = f'(s)$) и пользуясь замечанием в) к теореме 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Если при $h \rightarrow 0$ плотность интеграла типа Коши удовлетворяет условию

$$\left| \int_0^h [F(x(s)) - F(x(s_0))] ds \right| = o(h^{\alpha+1}),$$

то равномерно на всяком сегменте $|\psi_0| \leq \pi\theta/2$, $0 \leq \theta < 1$, справедливо соотношение

$$|P_\varepsilon(s_0, \psi_0, F) - F(x(s_0))| = o(\varepsilon^\alpha).$$

Из этой теоремы при $\alpha = 0$ следует соответствующее утверждение об интегралах типа Коши, принадлежащее И. И. Привалову (¹).

4. Свое утверждение о сходимости сингулярного интеграла $P_\varepsilon(s_0, \psi_0, f)$ И. И. Привалов получил в виде следствия из более общего результата о сходимости операторов

$$\pi_\varepsilon(x_0, \psi_0, f) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \frac{e^{i\varphi} df(s)}{x-z} - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{i\varphi} df(s)}{x-x_0} \right], \quad (6)$$

где Γ_ε — часть кривой Γ , получающаяся после удаления из Γ меньшей дуги с концами $x(s_0 - \varepsilon)$ и $x(s_0 + \varepsilon)$.

Заметим, что, пользуясь теоремой 1, можно вывести и соответствующее утверждение о порядке сходимости операторов (6).

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
10 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, Л., 1950.
² С. П. Преображенский, Сибирск. матем. журн., 9, № 2 (1968). ³ И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, М., 1959. ⁴ А. Д. Гаджиев, Изв. АН АзербССР, серия физ.-матем. и техн. наук, № 6 (1963).