Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 6

УДК 513.83 МАТЕМАТИКА

А. А. ИВАНОВ

РЕДУКТИВНОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ СТРУКТУР

(Представлено академиком П. С. Александровым 7 II 1972)

1. Вейлевские равномерные структуры, обладающие «достаточно хорошими» свойствами, являются классическим объектом изучения в теории равномерных структур. Однако их «достаточно много» лишь на «достаточно хороших» топологических пространствах. В связи с этим желательно указать равномерные структуры, хорошо представленные на произвольном топологическом пространстве и одновременно имеющие некоторые свойства, аналогичные известным свойствам вейлевских равномерных структур.

Под произвольным топологическим пространством X здесь будет пониматься пространство класса T, т. е. топологическое пространство, структура которого не обязана удовлетворять аксиомам отделимости; под равномерной структурой на X — произвольная непустая система ρ открытых покрытий топологического пространства X, удовлетворяющая следующим условиям:

P1. Если покрытие $s \in \rho$ вписано в покрытие s', то $s' \in \rho$.

P2. Если $s_1 \in \rho$ и $s_2 \in \rho$, то $s_1 \wedge s_2 = \{\zeta_1 \cap \zeta_2 | \zeta_1 \in s_1,\ \zeta_2 \in s_2\} \in \rho$.

2. Пусть s_1 и s_2 — произвольные системы (не обязательно покрытия) открытых в X множеств. Будем говорить, что система s_2 ρ-мажорирует систему s_1, записывая $s_1 \leqslant s_2$, если для любой системы s открытых в X множеств из $s_1 \cup s \in \rho$ следует $s_2 \cup s \in \rho$.

Будем говорить, что покрытие $s_2 \cup s' \in \rho$ ρ-редуцируемо в $s_1 \cup s' \in \rho$, если $s_1 \underset{\rho}{\leqslant} s_2$.

Будем говорить, что равномерная структура ρ **слабо редуктивна**, если любое покрытие $s_2 \cup \{\zeta\} \in \rho$ ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $s_1 \cup \{\zeta\} \in \rho$, в котором s_1 — конечная система; **бинарно редуктивна**, если любое покрытие $s_2 \cup \{G\} \in \rho$ ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $\{\zeta_1, \zeta\} \in \rho$; **редуктивна**, если любое покрытие $s_2 \cup s' \in \rho$ ρ-редуцируемо, в какое-нибудь покрытие $s_1 \cup s' \in \rho$, в котором s_1 — конечная система; **сильно редуктивна**, если любое покрытие $s_2 \cup s' \in \rho$ ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $\{\zeta_1\} \cup s' \in \rho$.

Можно доказать, что любая прекомпактная равномерная структура на произвольном топологическом пространстве является редуктивной равномерной структурой, любая вейлевская равномерная структура является сильно редуктивной равномерной структурой, максимальная равномерная структура на произвольном топологическом пространстве также является сильно редуктивной структурой.

Четыре типа редуктивности равномерных структур определяют соответственно четыре класса равномерных структур. Построением соответствующих параметров равномерных структур можно показать, что все четыре класса редуктивности различны, не исчерпывают класс всех равномерных структур и строго содержат класс вейлевских равномерных структур.

3. Отношение σ для конечных систем замкнутых в X множеств называют отношением смежности на X, если выполняются следующие условия:

C1. Если любой элемент системы β содержит какой-нибудь элемент системы α и $\sigma(\alpha)$ имеет место, то $\sigma(\beta)$ имеет место.

C2. Если имеет место $\sigma(\alpha \vee \beta)$, то имеет место $\sigma(\alpha)$ или $\sigma(\beta)$ (здесь $\alpha \vee \beta = \{F \cup H' | F \in \alpha, H \in \beta\}$).

C3. Если пересечение всех элементов системы α не пусто, то $\sigma(\alpha)$ имеет место.

C4. Если пустое множество принадлежит системе α, то $\sigma(\alpha)$ не имеет места.

Любая равномерная структура ρ однозначно определяет на X такое отношение смежности σ, называемое согласованным с ρ, что для произвольной конечной системы α замкнутых в X множеств $\sigma(\alpha)$ имеет место тогда и только тогда, когда $C\alpha = \{X \setminus F | F \in \alpha\} \notin \rho$.

Пусть ρ — какая-нибудь равномерная структура на X и σ — согласованное с ρ отношение смежности. Это отношение смежности определяет бикомпактное расширение σX пространства X, получаемое присоединением к X всех максимальных исчезающих систем σ-смежности ([1]). В свою очередь, равномерная структура ρ определяет расширение ρX пространства X, получаемое присоединением к X всех максимальных систем среди исчезающих систем σ-смежности γ, для которых $C\gamma \notin \rho$, иначе говоря присоединением всех максимальных исчезающих ρ-кофильтров Коши ([2]).

Если ρ является вейлевской равномерной структурой, то $\rho X \subset \sigma X$, однако построением соответствующего примера можно доказать, что в общем случае $\rho X \not\subset \sigma X$.

На расширении ρX однозначно определяется равномерная структура $\hat{\rho}$, являющаяся минимальной равномерной структурой, для которой из $s \in \hat{\rho}$ следует $s \wedge X \in \rho$, согласованное с $\hat{\rho}$ отношение смежности σ' и отношение смежности $\hat{\sigma}$, для которого $\hat{\sigma}(\beta)$ не имеет места тогда и только тогда, когда существует такая конечная система α замкнутых в X множеств, что $\sigma(\alpha)$ не имеет места и каждое множество $\bar{F}^{\rho X}$, $F \in \alpha$, содержит какое-нибудь множество $H \in \beta$.

Если ρ является вейлевской равномерной структурой, то отношения смежности $\hat{\sigma}$ и σ' совпадают, и этот факт является основой известной теоремы о полноте пополнения по вейлевской равномерной структуре. Построением соответствующего примера можно доказать, что в общем случае $\hat{\sigma}$ и σ' не совпадают. Кроме того, можно доказать, что в общем случае максимальные исчезающие ρ-кофильтры Коши, присоединением которых получают ρX, не являются σ-гроздями (в смысле Лидера ([3])).

4. Пусть ρ — равномерная структура на топологическом пространстве X и σ — согласованное с ρ отношение смежности; тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Если ρ — слабо редуктивная равномерная структура, то $\rho X \subset \sigma X$.*

Теорема 2. *Если ρ — бинарно редуктивная равномерная структура, то все присоединяемые к X точки ρX являются σ-гроздями.*

Теорема 3. *Если ρ — сильно редуктивная равномерная структура, то $\hat{\sigma}$ совпадает с σ'.*

Эти утверждения демонстрируют, как по мере усиления редуктивности равномерных структур их свойства приближаются к свойствам вейлевских равномерных структур.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
16 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Иванов, ДАН, 128, № 1, 33 (1959). [2] А. А. Иванов, Proc. I Intern. Symp. Ext. Theory, Berlin, 1967, p. 133. [3] S. Leader, Fund. Math., 47, 205 (1959).