Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 6

УДК 533.95 *ГИДРОМЕХАНИКА*

М. Д. КАРТАЛЕВ

О ТЕОРЕМЕ ЦЕМПЛЕНА ДЛЯ УДАРНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С АНИЗОТРОПНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

(Представлено академиком Г. И. Петровым 24 I 1972)

В работе рассматриваются ударные волны в бесстолкновительной плазме в сильном магнитном поле. При этом предполагается, что непрерывное движение такой плазмы описывается квазилинейной системой уравнений Чу, Гольдбергера и Лоу ([1]):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{u}=0,\quad \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}=-\operatorname{div}\mathbf{P}+\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B},\tag{1}$$
$$\partial\mathbf{B}/\partial t=\operatorname{rot}[\mathbf{u}\times\mathbf{B}],\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_\parallel B^2}{\rho^3}\right)=0,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{p_\perp}{\rho B}\right)=0.$$

Здесь ρ — плотность, $\mathbf{u}$ — средняя скорость, $\mathbf{P}$ — тензор напряжений с компонентами $p_{ij}=p_\parallel b_ib_j+p_\perp(\delta_{ij}-b_ib_j)$, $p_\parallel$ и $p_\perp$ — продольное и поперечное давления, $\mathbf{B}$ — вектор индукции магнитного поля и $\mathbf{b}=\mathbf{B}/B$.

Чтобы ввести понятие энтропии, воспользуемся универсальным термодинамическим соотношением — уравнением притока тепла

$$d\varepsilon=-\frac{1}{\rho}p_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dt+dq^{(e)},\tag{2}$$

где ε — плотность внутренней энергии, $dq^{(e)}$ — элементарный приток тепла к единице массы. Выражения (2) можно привести к виду

$$d\varepsilon=-p_\parallel d\frac{1}{\rho}-\frac{p_\parallel-p_\perp}{\rho B}dB+dq^{(e)}.\tag{3}$$

Пусть внутренняя энергия задается выражением

$$d\varepsilon=d(p_\perp/\rho+p_\parallel/2\rho).\tag{4}$$

Тогда после подстановки (4) в (3) можно заметить, что $dq^{(e)}$ распадается на две части: $dq^{(e)}=dq^{(e)}_\parallel+dq^{(e)}_\perp$,

$$dq^{(e)}_\parallel=\frac{1}{2}d\frac{p_\parallel}{\rho}+p_\parallel d\frac{1}{\rho}+\frac{p_\parallel}{\rho B}dB,\quad dq^{(e)}_\perp=d\frac{p_\perp}{\rho}-\frac{p_\perp}{\rho B}dB.\tag{5}$$

Рассмотрим обратимые процессы с притоком тепла. «Продольную» и «поперечную» энтропии в расчете на единицу массы определим как

$$ds_\parallel=dq^{(e)}_\parallel/T_\parallel,\quad ds_\perp=dq^{(e)}_\perp/T_\perp,\quad T_\parallel=(1/c_\parallel)p_\parallel\rho^{-1},\quad T_\perp=(1/c_\perp)p_\perp\rho^{-1},\tag{6}$$

где $c_\parallel$ и $c_\perp$ — размерные константы.

Из (5) следует, что

$$(dq^{(e)}_\parallel/dT_\parallel)_{B,\rho}={}^1/_2\,c_\parallel,\quad (dq^{(e)}_\perp/dT_\perp)_B=c_\perp.\tag{7}$$

Первое из соотношений (7) показывает, что $^1/_2c_\parallel$ представляет количество «продольного» тепла, которое необходимо подвести к единице массы, для того чтобы при постоянном объеме и постоянном B поднять ее продольную температуру на 1° С. Увеличение энергии хаотического движения захваченных магнитным полем частиц только в поперечном направлении не связано с расширением газа. Поэтому можно формально написать, что и производная во втором выражении (7) берется при постоянном объеме.

Следовательно, и $c_\perp$ имеет физический смысл теплоемкости при постоянных ρ и B, но в поперечном направлении. Так как в продольном направлении одна степень свободы, а в поперечном — две, естественно положить $c_\parallel = c_\perp = c^*$.

Вводя для удобства $c = {}^3/_2 c^*$, получаем из (6)

$$ds_\parallel = c\, d \ln (p_\parallel^{1/3} B^{2/3} \rho^{-1}), \qquad ds_\perp = c\, d \ln (p_\perp^{2/3} \rho^{-2/3} B^{-2/3}). \tag{8}$$

Адиабатические соотношения (последние два уравнения из (1)) эквивалентны $ds_\parallel = 0$, $ds_\perp = 0$. Определяем полную энтропию:

$$ds = ds_\parallel + ds_\perp = c\, d \ln (p_\parallel^{1/3} p_\perp^{2/3} \rho^{-5/3}). \tag{9}$$

Выражение (9) можно получить из кинетического определения энтропии при помощи бимаксвелловской функции распределения ([3]).

При $p_\parallel \neq p_\perp$ вместо адиабаты Пуассона получается трехмерная адиабата, задаваемая уравнением $ds = 0$, или

$$p_\parallel p_\perp^2 V^5 = \text{const} \ (V = 1/\rho). \tag{10}$$

Далее ограничиваемся рассмотрением только той части этой поверхности, которая находится в первом октанте и имеет физический смысл ($p_\parallel$, $p_\perp$ и V положительные). Она разделяет пространство $p_\parallel p_\perp V$ на две области. Если на адиабате $s = s_1$, то в той области, которая содержит начало координат, $s < s_1$, а с другой стороны (10) $s > s_1$.

Уравнение (3) для обратимых процессов с притоком тепла можно записать в виде

$$d\varepsilon = T_\parallel\, ds_\parallel + T_\perp\, ds_\perp - p_\parallel d \frac{1}{\rho} - \frac{p_\parallel - p_\perp}{\rho B}\, dB. \tag{11}$$

Если внутренняя энергия задана как функция $s_\parallel$, $s_\perp$, ρ и B, то она является термодинамическим потенциалом. Действительно, из (11) следует

$$\partial\varepsilon / \partial s_\parallel = T_\parallel, \quad \partial\varepsilon / \partial s_\perp = T_\perp, \quad \partial\varepsilon / \partial V = -p_\parallel,$$
$$\partial\varepsilon / \partial B = (p_\perp - p_\parallel) / \rho B.$$

Здесь $T_\parallel$ есть производная ε по $s_\parallel$ при фиксированных $s_\perp$, V, B и т. д. Таким образом, $T_\parallel$, $T_\perp$, $p_\parallel$ и $p_\perp$ определены однозначно как функции от $s_\parallel$, $s_\perp$, ρ, B.

Соотношения на сильном разрыве имеют вид ([4]) (12)

$$m \left\{\varepsilon + \frac{1}{2} m^2 V^2 + p_\perp V + \frac{1}{2} u_\tau^2 + V (p_\parallel - p_\perp) \frac{B_n^2}{B^2} + \frac{1}{4\pi} V B_\tau^2 \right\} +$$
$$+ B_n \left\{ \frac{p_\parallel - p_\perp - B^2/(4\pi)}{B^2} (\mathbf{B}_\tau \mathbf{u}_\tau) \right\} = 0,$$
$$\{p_\perp\} + m^2 \{V\} + \frac{1}{8\pi} \{B_\tau^2\} + B_n^2 \left\{ \frac{p_\parallel - p_\perp}{B^2} \right\} = 0, \tag{13}$$
$$m \{\mathbf{u}_\tau\} + B_n \left\{ \frac{p_\parallel - p_\perp - B^2/(4\pi)}{B^2} \mathbf{B}_\tau \right\} = 0,$$
$$B_n \{\mathbf{u}_\tau\} - m \{V \mathbf{B}_\tau\} = 0, \quad \{m\} = 0, \quad \{B_n\} = 0, \quad m = \rho u_n.$$

Здесь $\{X\} = X - X_1$, где индекс 1 означает значение величины до разрыва, а без индекса — после разрыва. Индексы τ и n означают проекции векторных величин на касательную и нормаль к поверхности разрыва соответственно. При $p_\parallel = p_\perp$, $p_{\parallel 1} = p_{\perp 1}$ (13) переходит в соответствующую систему для магнитной гидродинамики ([5]). Если задано еще одно дополнительное соотношение, совместимое с (13), система замыкается, т. е. по значениям параметров до разрыва можно найти их значения после разрыва.

Далее рассматриваются бесстолкновительные ударные волны, т. е. разрывы, в которых $m \neq 0$ и для которых можно выбрать плоскость, проходящую через нормаль и содержащую векторы магнитного поля и скорости как до, так и после разрыва. В работе ([6]) доказано, что последнее имеет место всегда, за исключением случая, когда нормальная составляющая скорости с обеих сторон разрыва равна альфвеновской скорости a_A: $a_A^2 = (B^2 / (4\pi) + p_\perp - p_\|)\rho^{-1}(B_n^2 / B^2)$.

Ограничимся случаем $B_n \neq 0$. Из системы (13) можно получить для ударной адиабаты уравнение

$$\{\varepsilon\} + \langle p_\| \rangle \{V\} + \frac{1}{16\pi}\{V\}\{B_\tau\}^2 - \left\langle B_\tau^2 \frac{p_\| - p_\perp}{B^2} \right\rangle \{V\} + \\ + \left\langle B_\tau \frac{p_\| - p_\perp}{B^2} \right\rangle \{B_\tau V\} = 0. \tag{14}$$

Здесь использовано обозначение $\langle X \rangle = {}^1/_2 (X + X_1)$.

Чтобы выяснить, как изменяется энтропия вдоль ударной адиабаты, рассмотрим некоторый обратимый процесс с притоком тепла — между состоянием до разрыва $p_{\|1} p_{\perp 1} V_1 B_1$ и произвольным состоянием $p_\| p_\perp VB$, принадлежащим ударной адиабате, для которого верно равенство (11). Для ударных волн, у которых все величины испытывают небольшой скачок, получаем

$$T_{\|1}(s_\| - s_{\|1}) + T_{\perp 1}(s_\perp - s_{\perp 1}) = -\frac{1}{12}\frac{\partial^2 p_\|}{\partial V^2}\bigg|_1 (V - V_1)^3 + \\ + \frac{1}{16\pi}(V - V_1)(B_\tau - B_{\tau 1})^2 + K_1 (V - V_1)(B - B_1)^2 + \\ + K_2 (V - V_1)^2 (B - B_1) + K_3 (B - B_1)^3 + \ldots \tag{15}$$

Производная в первом члене справа берется при постоянных $s_\|$, $s_\perp$, B. Так как $s_\perp$ от $p_\|$ не зависит, для ее вычисления можно воспользоваться выражением $s_\| = \text{const}$. Это даст $-{}^1/_{12}\partial^2 p_\| / \partial V^2 |_1 = -p_{\|1} / V_1^2 < 0$. Коэффициенты $K_{1,2,3}$ в зависимости от значений параметров перед скачком могут иметь как положительные, так и отрицательные знаки, причем критерии, определяющие знак, разные. Отбросив члены третьего порядка малости и введя полную энтропию, преобразуем (15) к виду

$$s - s_1 = \frac{T_{\|1} - T_{\perp 1}}{T_{\|1}}(s_\perp - s_{\perp 1}) = \frac{T_{\perp 1} - T_{\|1}}{T_{\perp 1}}(s_\| - s_{\|1}). \tag{16}$$

Требование возрастания энтропии в ударной волне приводит к следующему выводу: если $T_{\|1} > T_{\perp 1}$, возможны только такие скачки, в которых $s_\perp$ растет, а $s_\|$ убывает. При $T_{\|1} < T_{\perp 1}$, наоборот, $s_\|$ растет, а $s_\perp$ убывает. Из (16) и (6) видно, что энтропия может возрастать, несмотря на то, что в этом приближении $dq^{(e)} = dq_\|^{(e)} + dq_\perp^{(e)} = 0$. Если $T_{\|1} = T_{\perp 1}$, в первом приближении (15) дает $s_\| - s_{\|1} = -(s_\perp - s_{\perp 1})$, т. е. $s - s_1 = 0$. Полезно напомнить, что это не совпадает с непрерывными течениями, описываемыми системой (1), где не только s, но также и $s_\|$ и $s_\perp$ в отдельности не меняются. Предположим, наконец, что на разрыве только одна из величин $s_\|$ и $s_\perp$ *сохраняется, например*, пусть это будет $s_\perp$, как предположено в ([7]). Тогда левая часть (15) имеет вид $T_{\|1}(s_\| - s_{\|1})$, или $T_{\|1}(s - s_1)$. Следовательно, скачок s (а также и $s_\|$) имеет третий порядок малости. Если ограничиться такими значениями параметров до разрыва, при которых члены, содержащие скачок B, в (15) малы по сравнению с первым членом справа, то теорема Цемплена верна, т. е. осуществимы только скачки уплотнения. В общем случае, однако, не исключаются области, где скачки разрежения возможны, и области, где скачки уплотнения невозможны. Ниже подобный вывод с ясной геометрической интерпретацией получается при несколько измененной постановке задачи.

Пусть в системе соотношений (13), а следовательно, и в (14) заданным параметром считается не только B_1, но и B. Тогда для остальных параметров система замкнута. Уравнение ударной адиабаты (14) задает поверхность второго порядка (гиперболической параболоид) в пространстве $p_{\|} p_{\perp} V$:

$$
\begin{gathered}
p_{\|} V + p_{\perp} V + C p_{\perp} + D p_{\|} + E V + F = 0, \\
C = -\frac{V_1 B_\tau}{2B}\{B_\tau\}, \quad D = -\frac{V_1}{2}\left(1 - \frac{B_\tau}{B^2}\{B_\tau\}\right), \\
E = \frac{1}{2}\left(p_{\|1} - \frac{1}{8\pi}\{B_\tau\}^2 + \frac{p_{\|1} - p_{\perp 1}}{B_1}\{B_\tau\}\right), \\
F = -\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} p_{\|1} V_1 + \frac{V_1}{16\pi}\{B_\tau\}^2\right).
\end{gathered} \tag{17}
$$

Поверхность (17) пересекается с адиабатой (10) по некоторой кривой $\mathscr{L}$. Эта кривая разделяет ударную адиабату на области, одна из которых неосуществима, так как на ней энтропия убывает. Для выполнения теоремы Цемплена необходимо, чтобы эта область находилась выше плоскости $V = V_1$ и чтобы $\mathscr{L}$ лежала в этой плоскости. Легко показать, что последнее утверждение не выполняется. Достаточно ограничиться рассмотрением только малой окрестности точки $p_{\|1} p_{\perp 1} V_1$, т. е. ударной волной, слабой по $p_{\|}$, $p_{\perp}$, V. Из системы (13) легко видеть, что действительно возможны такие разрывы, в которых $\{p_{\|}\}$, $\{p_{\perp}\}$ и $\{V\}$ стремятся к нулю, тогда как $\{B\}$ остается конечным. В магнитной гидродинамике это невозможно, так как из второго уравнения системы (13) при $p_{\|} \equiv p_{\perp}$ видно, что $\{B_\tau\} \to 0$ вместе с $\{p\}$ и $\{V\}$.

В малой окрестности точки 1 кривая $\mathscr{L}$ может быть заменена своей касательной прямой L, которая есть пересечение касательных плоскостей к поверхностям (10) и (17) в точке 1. Прямые a_1 и a_2, полученные пересечением этих плоскостей с плоскостью $V = V_1$, не совпадают. Это значит, что L не лежит в плоскости $V = V_1$. Следовательно, на ударной адиабате можно выделить четыре вида областей, в двух из которых энтропия возрастает соответственно в волнах сжатия и разрежения, а в других — энтропия убывает. Очевидно, что для волн произвольной интенсивности картина еще сложнее и в общем случае теорема Цемплена не верна.

Покажем, что в одном частном случае теорема Цемплена имеет место.

Рассмотрим бесстолкновительные ударные волны, в которых $m \neq 0$, $\{V\} \neq 0$, $B_n = 0$. Для них обычно предполагается, что $\{p_{\|} V\} = 0$ ([8]). Из четвертого соотношения (13) имеем $VB = V_1 B_1 \equiv b$. Если ввести $P_{\perp} = p_{\perp} + b^2 / (8\pi V^2)$, система (13) сводится к системе соотношений на разрыве для некоторого эффективного совершенного газа с давлением $P_{\perp}$ и показателем адиабаты $\gamma = 2$. Уравнение адиабаты (10) здесь принимает вид $p_{\perp} V^2 = \mathrm{const}$, что эквивалентно соотношению $P_{\perp} V^2 = \mathrm{const}$. Это адиабата Пуассона для эффективного газа. Все результаты газовой динамики, в том числе и теорема Цемплена, верны в рассматриваемой ударной волне.

Автор выражает благодарность В. Б. Баранову, под чьим руководством была выполнена работа, а также А. Г. Куликовскому за обсуждение результатов.

Единый центр математики и механики
София, Народная Республика Болгария

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. F. Chew, M. L. Goldberger, F. E. Low, Proc. Roy. Soc. (London), **A236**, 112 (1956). [2] А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, Магнитная гидродинамика, 1962. [3] B. Abraham-Shrauner, J. Plasma Phys., 1, 361 (1967). [4] Y. M. Lynn, Phys. Fluids, **10**, 2278 (1967). [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., 1957. [6] F. M. Neubauer, Zs. Phys., **237**, 205 (1970). [7] В. Б. Баранов, М. Д. Карталев, Мех. жидкости и газа, **6**, 3 (1970). [8] К. Лонгмайр, Физика плазмы, М., 1966.