

И. И. БАВРИН

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ СТРУКТУРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 21 XII 1972)

В настоящей заметке дано полное структурное представление для вводимых здесь ассоциированных с оператором $N^{(\omega; \tilde{\omega})}$ широких классов гармонических и аналитических функций. Эти классы являются существенным обобщением таких классов функций, как известного класса гармонических функций, совпадающего с множеством функций, представимых интегралом Пуассона — Стильбеса ⁽¹⁾, классов аналитических функций, введенных Г. Герглотцем ⁽²⁾ и Ф. Риссом ⁽³⁾, соответствующих классов гармонических и аналитических функций, введенных М. М. Джрбашяном ^(4, 5). Указанные новые классы функций вводятся с помощью построенного в ⁽⁶⁾ оператора $N^{(\omega; \tilde{\omega})}$ *, а основным аппаратом для установления структурных формул служат обобщенные интегральные формулы Пуассона и Шварца, ассоциированные с данными системами функций $\omega_1, \dots, \omega_m; \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_{\tilde{m}}$ **.

Обозначим через $U_{(\omega; \tilde{\omega})}$ множество гармонических в круге $|z| < 1$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_0^{2\pi} |N^{(\omega; \tilde{\omega})} [u(re^{i\varphi})]| d\varphi \right\} < +\infty.$$

Обозначим через $C_{(\omega; \tilde{\omega})}$ класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re} N^{(\omega; \tilde{\omega})} [f(z)] \geq 0, \quad |z| < 1.$$

Обозначим через $R_{(\omega; \tilde{\omega})}$ класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, для которых выполняется условие

$$\sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} N^{(\omega; \tilde{\omega})} [f(re^{i\varphi})]| d\varphi \right\} < +\infty.$$

Так как при $f(z) \in C_{(\omega; \tilde{\omega})}$ интегралы

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} N^{(\omega; \tilde{\omega})} [f(re^{i\varphi})]| d\varphi = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} N^{(\omega; \tilde{\omega})} [f(re^{i\varphi})] d\varphi = 2\pi \operatorname{Re} f(0)$$

ограничены числом, не зависящим от $r < 1$, то, очевидно, имеем

$$C_{(\omega; \tilde{\omega})} \subset R_{(\omega; \tilde{\omega})}.$$

Отметим следующие классы, вытекающие из определения классов $U_{(\omega; \tilde{\omega})}$, $C_{(\omega; \tilde{\omega})}$, $R_{(\omega; \tilde{\omega})}$.

* Напомним, что здесь и всюду ниже $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_{\tilde{m}})$; $\omega_j = \omega_j(x) \in \Omega$, $\tilde{\omega}_{\tilde{j}} = \tilde{\omega}_{\tilde{j}}(x) \in \tilde{\Omega}$, $j = 1, \dots, m$; $\tilde{j} = 1, \dots, \tilde{m}$.

** О других обобщенных формулах см., например, в ^(4, 5, 7).

1) $\omega = (1, \dots, 1)$, $\tilde{\omega} = (1, \dots, 1)$. При таком условии имеем известные три класса. Представление первого из них хорошо известно ⁽¹⁾, а представления двух других классов были впервые получены в ^(2, 3).

2) $\omega = ((1-x)^\alpha, 1, \dots, 1)$, $\tilde{\omega} = (1, \dots, 1)$, $-1 < \alpha < +\infty$. В этом случае получаем классы функций, введенные в ⁽⁴⁾, где установлены и их представления.

3) $\omega = (\omega_1, 1, \dots, 1)$, $\tilde{\omega} = (1, \dots, 1)$, где $\omega_1 = \omega_1(x)$ — любая функция из класса Ω . При этом условии получим классы функций, рассмотренные в ⁽⁵⁾, где найдены и их представления. Представления классов $U_{(\omega; \tilde{\omega})}$, $C_{(\omega; \tilde{\omega})}$, $R_{(\omega; \tilde{\omega})}$ даются в следующих теоремах 1 и 2.

Теорема 1. а) Класс $U_{(\omega; \tilde{\omega})}$ совпадает с множеством функций $u(z)$, представимых в виде интеграла

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N^{(\tilde{\omega}; \omega)} [P(\varphi - \theta, r)] d\psi(\theta) \quad (1)$$

($0 \leq r < 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), где $\psi(\theta)$ — произвольная вещественная функция с конечным полным изменением на $[0, 2\pi]$.

б) В представлении (1) данной функции $u(z) \in U_{(\omega; \tilde{\omega})}$ соответствующая функция $\psi(\theta)$ может быть определена с помощью предела

$$\psi(\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\theta N^{(\tilde{\omega}; \omega)} [u(\rho_n e^{i\varphi})] d\varphi,$$

где $\{\rho_n\}$, $0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n < \dots$, $\rho_n \uparrow 1$, — некоторая возрастающая последовательность.

в) Класс $U_{(\omega; \tilde{\omega})}^* \subset U_{(\omega; \tilde{\omega})}$ гармонических в круге $|z| < 1$ функций $u(z)$, для которых $N^{(\tilde{\omega}; \omega)} [u(z)] \geq 0$, $|z| < 1$, совпадает с множеством функций, представимых в виде (1), где функция $\psi(\theta)$ не убывает на $[0, 2\pi]$.

Теорема 2. а) Класс $C_{(\omega; \tilde{\omega})}$ совпадает с множеством функций $f(z)$, представимых в виде

$$f(z) = iC + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N^{(\tilde{\omega}; \omega)} [S(e^{-i\theta}z)] d\psi(\theta), \quad |z| < 1, \quad (2)$$

где $\text{Im } C = 0$, $\psi(\theta)$ — произвольная неубывающая ограниченная функция на $[0, 2\pi]$.

б) Класс $R_{(\omega; \tilde{\omega})}$ совпадает с множеством функций, представимых в виде (2), где $\psi(\theta)$ — вещественная функция с конечным изменением на $[0, 2\pi]$.

В процессе доказательства теоремы 1 существенно используется указанная выше обобщенная формула Пуассона, а при доказательстве теоремы 2 кроме отмеченной обобщенной формулы Шварца — теорема 1 данной заметки.

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
15 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950.
² G. Herglotz, Leipzig Ber., 63, 501 (1911). ³ F. Riesz, Ann. Norm., 28 (3), 34 (1911).
⁴ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966. ⁵ М. М. Джрбашян, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 5, 1075 (1968). ⁶ И. И. Баврин, ДАН, 204, № 4 (1972). ⁷ И. И. Баврин, В сборн. тр. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, М., в. 15, 3 (1973).