

УДК 517.551

МАТЕМАТИКА

Ф. А. БЕРЕЗИН

КВАНТОВАНИЕ В КОМПЛЕКСНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком С. М. Никольским 19 XII 1972)

1. Общая задача квантования. Пусть M — многообразие, на котором бесконечно дифференцируемые функции образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона

$$[f_1, f_2] = \sum \omega^{ik}(x) \frac{\partial f_1}{\partial x^i} \frac{\partial f_2}{\partial x^k}. \quad (1)$$

Задача квантования состоит из двух частей. Во-первых, требуется построить семейство ассоциативных алгебр с инволюцией $A_h(M)$, $h > 0$, с перечисленными ниже свойствами, элементами которых служат дифференцируемые функции на M (не обязательно все). Во-вторых, следует построить линейные представления этих алгебр в гильбертовом пространстве. Параметр h является постоянной Планка.

Произведение $f_1, f_2 \in A_h$ обозначим $f_1 * f_2$. Отметим, что $f_1 * f_2$ зависит от h . Алгебры A_h должны обладать свойствами:

- 1) Если $f(h|x) = (f_1 * f_2)(x)$, то $f(0|x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$.
- 2) Если $f(h|x) = h^{-1}[(f_1 * f_2)(x) - (f_2 * f_1)(x)]$, то при $h \rightarrow 0$ $\lim f(h|x) = [f_1, f_2]$, где $[f_1, f_2]$ — скобка Пуассона (1).

Свойства 1) и 2) называются законом соответствия. Их выполнения следует добиться в первую очередь. Следующие ниже свойства обязательны в меньшей степени.

- 3) Инволюция в A_h совпадает с комплексным сопряжением.
- 4) В A_h есть единица.
- 4') Единицей служит функция $f(x) = 1$.
- 5) В A_h существует линейный функционал $\text{sp } f$ (след), определенный на подмножестве $\bar{A}_h \subset A_h$ и обладающий свойством $\text{sp}(f_1 * f_2) = \text{sp}(f_2 * f_1)$, при $f_1 * f_2 \in \bar{A}_h$, также $f_2 * f_1 \in \bar{A}_h$.

5') $\text{sp } f = \int f(x) d\mu(x)$, где $\mu(x)$ — некоторая мера на M .

6) Сопоставление $M \rightarrow A_h(M)$ должно быть естественным, т. е. перестановочным с морфизмами симплектических многообразий, принадлежащими к некоторой заранее зафиксированной категории.

Последняя оговорка существенна, так как добиться перестановочности со всеми морфизмами симплектических многообразий, по-видимому, невозможно. В работе строятся алгебры A_h для случая, когда многообразием служит ограниченная область в комплексном пространстве.

2. Построение алгебр A_h . Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$. Элементами кольца A_h будем считать вещественно-аналитические функции $f(z, \bar{z})$ в Ω , допускающие аналитическое продолжение $f(z, \bar{v})$ в $\Omega \times \Omega$. Закон умножения в A_h будем искать в виде

$$(f_1 \times f_2)(z, \bar{z}) = \int f_1(z, \bar{v}) f_2(v, \bar{z}) G_h(v, \bar{v}) z, \bar{z} d\mu(v, \bar{v}), \quad (2)$$

где $d\mu(z, \bar{z}) = \det \| \partial^2 K / \partial z_i \partial \bar{z}_k \|$, $\prod dz d\bar{z}$, $K = K(z, \bar{z})$ — ядро-функция Ω , $\prod dz d\bar{z} = \prod dx_k dy_k$, $x_k = \text{Re } z_k$, $y_k = \text{Im } z_k$. $d\mu(z, \bar{z})$ — инвариантная мера в Ω , если Ω — однородная область.

Теорема 1. 1) Ассоциативность умножения (2) эквивалентна равенству

$$G_h(v, \bar{v} | z, \bar{z}) = \tilde{F}_h(v, \bar{v}) F_h(z, \bar{z}) F_h^{-1}(z, \bar{v}) F_h^{-1}(v, \bar{z}), \quad (3)$$

где $F_h, \tilde{F}_h$ — две функции на Ω , причем F_h — вещественно-аналитическая функция, допускающая аналитическое продолжение на $\Omega \times \bar{\Omega}$.

2) Условия 5), 5') п. 1 эквивалентны равенству $\tilde{F}_h(v, \bar{v}) = c(h) F_h(v, \bar{v})$, где $c(h)$ — некоторая функция (ее определение связано с условиями 1), 2), 4')).

Приведем теперь конструкцию функции F_h , позволяющую удовлетворить всем требованиям 1) — 5') п. 1 в случае, если область Ω однородна, и всем, кроме, быть может, свойства 4), 4') в общем случае.

Теорема 2. 1) Пусть $F_h(z, \bar{z}) = K^{-1/h}(z, \bar{z})$, где $K(z, \bar{z})$ — kern-функция области Ω , $\tilde{F}_h(v, \bar{v}) = c(h) F_h(v, \bar{v})$, $c(h) = h^{-n} c_1(h)$, $n = \dim_c \Omega$, $c_1(0) = 1$.

Тогда закон умножения в A_h , определяемый формулами (2) и (3), удовлетворяет всем требованиям п. 1, кроме, быть может, 4), 4').

2) В случае, если область Ω однородная и круговая, требования 4), 4') выполняются при

$$c(h) = \mu(\Omega)^{1/h} \left[\int K(z, \bar{z})^{-1/h} d\mu(z, \bar{z}) \right]^{-1}, \quad (4)$$

где $\mu(\Omega)$ — евклидов объем Ω .

Доказательство состоит в применении метода перевала к интегралу

$$(I_h \Phi)(z, \bar{z}) = \int \Phi(v, \bar{v}) G_h(v, \bar{v} | z, \bar{z}) d\mu(v, \bar{v}). \quad (5)$$

Легко проверяется, что функция $K(z, \bar{v}) K(v, \bar{z}) K^{-1}(z, \bar{z}) K^{-1}(v, \bar{v})$ при фиксированных $z, \bar{z}$ имеет, как функция $v, \bar{v}$, единственный максимум при $z = v, \bar{z} = \bar{v}$. Обычные соображения позволяют дать асимптотическое разложение интеграла (5) с точностью до $o(h)$:

$$(I_h \Phi)(z, \bar{z}) = \Phi(z, \bar{z}) + h(\Delta \Phi(z, \bar{z}) + \alpha(z, \bar{z}) \Phi(z, \bar{z})) + o(h), \quad (6)$$

где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами метрики Бергмана.

Из (6) следуют свойства 1), 2) п. 1. 2-е утверждение теоремы 2 следует из приводимой ниже теоремы 3.

3. Представления. Обозначим через F_h гильбертово пространство аналитических функций в Ω со скалярным произведением

$$(f, g) = c(h) \int f(z) \overline{g(z)} K^{-1/h}(z, \bar{z}) d\mu(z, \bar{z}), \quad (7)$$

где $c(h)$ — та же константа, что в теореме 2.

Для дальнейшего основную роль играет

Теорема 3. Пусть Ω — однородная область. Тогда

1) при любом $h > 0$ функция $K(z, \bar{v})^{1/h}$ является однозначной аналитической функцией в $\Omega \times \bar{\Omega}$.

2) Функция $[K(z, \bar{v}) / K(v, \bar{v})]^{1/h}$ при любом $h > 0$ обладает воспроизводящим свойством: при $f \in F_h$

$$f(z) = c(h) \int f(v) [K(z, \bar{v}) / K(v, \bar{v})]^{1/h} d\mu'(v, \bar{v}). \quad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим в F_h ортонормированный базис $\psi_k(z)$ и построим функцию

$$L_h(z, \bar{z}) = \sum \psi_k(z) \overline{\psi_k(z)}. \quad (9)$$

Из (9) легко следует, что если $z \mapsto z(v)$ — автоморфизм области Ω , то $L_h(z, \bar{z}) = L_h(v, \bar{v}) [\partial(v, \bar{v}) / \partial(z, \bar{z})]^{1/h}$. Поэтому функция $L_h L_1^{1/h} = L_h K^{-1/h}$ инвариантна при всех автоморфизмах Ω . Ввиду однородности отсюда следует, что $L_h(z, \bar{z}) = \sigma(h) K^{1/h}(z, \bar{z})$. (Если $c(h)$ имеет вид (4), то $\sigma(h) = 1$.) Используя воспроизводящее свойство функции L_h , получаем (8).

Теорема 3 позволяет построить представление кольца A_h в пространстве F_h по формуле

$$(\Phi f)(z) = c(h) \int \Phi(z, \bar{v}) f(v) [K(z, \bar{v}) / K(v, \bar{v})]^{1/h} d\mu(v, \bar{v}), \quad (10)$$

где $\Phi \in A_h$, Φ — соответствующий оператор в F_h .

4. Симметрические пространства. Если Ω — симметрическое пространство, то может быть получено явное выражение оператора (5) через операторы Лапласа. Ввиду недостатка места, ограничимся случаем, когда Ω — единичный шар в C^n

$$I_h = \prod_{k=0}^{\infty} \left[1 - \frac{h^2 \Delta}{(n+1+kh)(n+1+(k-n)h)} \right]^{-1},$$

где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами. Отметим, что ядро-функции для всех классических областей найдены в (1).

5. Связь с другими теориями и возможные обобщения. 1) Пусть M — келерово многообразие с метрикой ds^2 , имеющей глобальный потенциал G , который является вещественно-аналитической функцией на M , имеющей, быть может, особенности на многообразии меньшей размерности. Положим $K_h = \exp(\frac{1}{h}G)$ и допустим, что K_h^{-1} не имеет особенностей. Рассмотрим пространство F_h аналитических функций на M с суммируемым квадратом по мере $K_h^{-1} d\mu(z, \bar{z})$. ($d\mu(z, \bar{z})$ определяется по метрике ds^2 обычным образом). Функции из F_h могут иметь особенности в нулях K_h^{-1} . Пусть $\psi_k(z)$ — ортонормированный базис в F_h и $L_h(z, \bar{z})$ определяется формулой (8). $L_h(z, \bar{z})$ будем называть вторичной ядро-функцией. Пусть E — множество на луче $(0, \infty)$ такое, что $L_h = \sigma(h) K_h$ при $h \in E$. В случае, если 0 служит предельной точкой для E , предшествующая теория переносится на M без изменений.

Примеры:

1) M — однородная ограниченная область. Как показано в настоящей статье, $L_h(z, \bar{z}) = \sigma(h) K_h(z, \bar{z})$, $E = (0, 1]$.

$$2) M = C^n, ds^2 = \sum dz_k d\bar{z}_k, G = \sum z_k \bar{z}_k \equiv z\bar{z}, K_h = \exp\left(\frac{1}{h} z\bar{z}\right), L_h(z, \bar{z}) = h^{-n} K_h(z, \bar{z}).$$

(Пространство F_h есть в этом случае классическое пространство Фока, введенное в (2).) $E = (0, \infty)$.

3) $M = S_2$ — двумерная сфера. В комплексных координатах $ds^2 = (1 + z\bar{z})^{-2} dz d\bar{z}$, $G = \ln(1 + z\bar{z})$, $L_h = h^{-1} K_h$ при целом h^{-1} . $E = (1, 2^{-1}, 3^{-1}, \dots)$. Аналогичным образом, как видно из формул Хуа Ло-кена, обстоит дело с любыми компактными симметрическими пространствами, двойственными ограниченными областями. (Во всех этих случаях пространства F_h конечномерны, например, для случая $S_2 \dim F_h = h^{-1}$).

4) M — двумерный цилиндр. $ds^2 = dz d\bar{z}$, $z = x + iy$, $0 \leq x \leq 2\pi$, $G = \left[\frac{1}{2i} (z - \bar{z}) \right]^2$, $L_h \neq \sigma(h) K_h$ ни при каком $h > 0$.

Отметим в заключение этого пункта, что келерова метрика определена с точностью до множителя. Таким образом, в предлагаемой теории роль планковской постоянной предоставлена этому неопределенному множителю.

2) Изложенная в этой статье конструкция примыкает к общей теории ко- и контра-вариантных символов операторов (3). Функция Φ в (10) слу-

жит ковариантным символом оператора Φ . Оператор (5) преобразует контравариантные символы в ковариантные. Векторы $f_0(z) = K(z, \bar{v})^{1/h}$ играют роль переполненной системы, лежащей в основе теории ⁽³⁾.

3) Пусть Ω — шар в C^n , G — его группа автоморфизмов, $\tilde{G}$ — универсальная накрывающая G , M — некоторое множество с мерой, $z(x), g(x), x \in M$, — измеримые функции на M со значениями в Ω и $\tilde{G}$ соответственно. Группу функций $g(x)$ обозначим $\tilde{G}_M$, ее естественно считать прямым произведением κ экземпляров $\tilde{G}$, где κ — мощность множества M . Рассмотрим функционал $R(z, \bar{z}) = -h^{-1} \int \ln K(z(x), \bar{z}(x)) d\mu(x)$ от функций $z(x)$ и введем с его помощью скалярное произведение в пространстве аналитических функционалов от $z(x)$: $(f, f) = \int |f(z)|^2 \exp R \prod_x d\mu(z(x), \bar{z}(x))$ (континуальный интеграл в правой части понимается как предел конечнократных, инвариантная мера $d\mu(z, \bar{z})$ нормирована условием $(f_0, f_0) = 1, f_0 \equiv 1$).

Возникающее таким путем гильбертово пространство аналитических функционалов является обобщением обычного фоковского пространства. В нем действует представление группы $\tilde{G}_M$ согласно формуле

$$(T_{g(x)} f)(z) = f(g^{-1}z) \exp \left\{ h^{-1} \int \ln j(g(x), z(x)) d\mu(x) \right\},$$

где $g^{-1}z = g^{-1}(x)z(x)$ — результат действия элемента $g^{-1}(x)$ на $z(x)$, $j(g, z)$ — аналитический якобиан преобразования $z \rightarrow g^{-1}z$.

Изложенная конструкция может быть применена к произвольным ограниченным однородным областям. Для симметрических областей, отличных от шара, она приводит к представлению группы $\tilde{G}_M$ в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой, представление является унитарным в ппдефинитном смысле.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Хуа Ло-кен, Гармонический анализ функций многих комплексных переменных, ИЛ, 1959. ² В. А. Фок, Zs. Phys., 75, 622 (1932). ³ Ф. А. Березин, Изв. АН СССР, сер. матем., 36, № 5, 1135 (1972).