

УДК 513.88

МАТЕМАТИКА

М. Н. ГИЛЬ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕЗОЛВЕНТЫ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ ПО СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 IV 1973)

Пусть $P(x)$ — спектральная функция, определенная на множестве вещественных чисел $\mu \in [0, 1]$ и принадлежащая некоторому линейному оператору A , действующему в гильбертовом пространстве.

Предположим существование треугольного интеграла

$$\int_{\mu} P(x) A dP(x). \quad (1)$$

Тогда

$$A = A_g + V, \quad (2)$$

где

$$A_g = \int_{\mu} dP(x) A dP(x) = \int_{\mu} \alpha(x) dP(x), \quad (3)$$

V — квазинильпотентный оператор, $\alpha(x)$ — ограниченная скалярная функция.

Классы операторов, для которых существует интеграл (1) и, следовательно, справедливо представление (2), рассмотрены в (1-3).

Ниже для резольвенты оператора, удовлетворяющего условиям, при которых существует интеграл (1), получено представление с помощью аддитивного и мультипликативного интегралов по спектральной функции. (Теория этих интегралов с достаточной полнотой изложена в (4), гл. V; (5), гл. II.)

Пусть $\beta(x)$ — некоторая ограниченная скалярная функция, определенная на множестве μ (не обязательно $\beta(x) = \alpha(x)$).

Обозначим

$$B = \int_{\mu} \beta(x) dP(x), \quad T = A - B.$$

Очевидно, оператор T удовлетворяет условию

$$dP(x_1) T dP(x_2) = dP(x_1) A dP(x_2), \quad x_1 \neq x_2, \quad x_1, x_2 \in \mu.$$

Лемма 1. Если существует интеграл (1), то справедливо равенство

$$S_T(\omega) \equiv I - T(A - \omega I)^{-1} = \int_{\mu} \left(I - T \frac{dP(x)}{\alpha(x) - \omega} \right) \quad (4)$$

(здесь и в дальнейшем буква I означает единичный оператор в соответствующем пространстве).

Правый мультипликативный интеграл (4) понимается как предел операторных произведений

$$\prod_{k=1}^N (I - T \Delta P(x_k) (A - \omega I)^{-1} \Delta P(x_k)) \quad (5)$$

в той же топологии, в какой интеграл (1) понимается как предел операторных сумм

$$\sum_{k=1}^N P(x_k) A \Delta P(x_k),$$

$$\Delta P(x_k) = P(x_k) - P(x_{k-1}), \quad x_k \in \mu_N;$$

μ_N — некоторое конечное разбиение множества μ .

Доказательство леммы 1 опирается на следующие соображения. Пусть x_1 — некоторое вещественное число, принадлежащее множеству μ . Представим оператор A в виде

$$\begin{aligned} A &= \Delta P(x_1) A \Delta P(x_1) + \Delta P(x_2) A \Delta P(x_2) + \Delta P(x_1) A \Delta P(x_2) = \\ &= \Delta P(x_1) A \Delta P(x_1) + \Delta P(x_2) A \Delta P(x_2) + \Delta P(x_1) T \Delta P(x_2), \\ \Delta P(x_1) &= P(x_1), \quad \Delta P(x_2) = I - P(x_1). \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} I - T(A - \omega I)^{-1} &= (I - T \Delta P(x_1) (A - \omega I)^{-1} \Delta P(x_1) (I - T \Delta P(x_2) \cdot \\ &\cdot (A - \omega I)^{-1} \Delta P(x_2)). \end{aligned}$$

Распространяя этот результат на случай произвольного конечного разбиения μ_N множества μ , приходим к (5). Затем, переходя к пределу в соответствующей топологии при $\mu_N \rightarrow \mu$ и учитывая, что

$$dP(x) (A - \omega I)^{-1} dP(x) = \frac{dP(x)}{\alpha(x) - \omega},$$

получим (4).

Теорема 1. Если существует интеграл (1), то

$$(A - \omega I)^{-1} = \int_{\mu} \frac{dP(x)}{\beta(x) - \omega} \int_{\mu} \left(I - T \frac{dP(t)}{\alpha(t) - \omega} \right). \quad (6)$$

Сходимость аддитивного интеграла в равенстве (6) в некоторой топологии обеспечивается сходимостью в той же топологии интеграла (3). Смысл мультипликативного интеграла в равенстве (6) тот же, что и в лемме 1.

Доказательство теоремы 1 опирается на лемму 1 и равенство

$$(A - \omega I)^{-1} = (B - \omega I)^{-1} S_T(\omega).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи равенства (6).

1) Пусть $\beta(x) \equiv 0$, тогда $T = A$. В этом случае

$$(A - \omega I)^{-1} = -\frac{1}{\omega} \int_{\mu} \left(I - A \frac{dP(x)}{\alpha(x) - \omega} \right). \quad (7)$$

2) Пусть $\beta(x) = \alpha(x)$, тогда $T = V$ — квазинильпотентный оператор. Из (6) имеем

$$(A - \omega I)^{-1} = \int_{\mu} \frac{dP(x)}{\alpha(x) - \omega} \int_{\mu} \left(I - V \frac{dP(t)}{\alpha(t) - \omega} \right). \quad (8)$$

Если при этом оператор V допускает представление (см. (1, 2))

$$V = 2i \int_{\mu} P(x) A_J dP(x), \quad A_J = \frac{A - A^*}{2i}, \quad (9)$$

то, очевидно,

$$(A - \omega I)^{-1} = \int_{\mu} \frac{dP(x)}{\alpha(x) - \omega} \int_{\mu} \left(I - 2iP(t) \frac{A_J dP(t)}{\alpha(t) - \omega} \right). \quad (10)$$

Если выполняются условия:

а) для всякого интервала (a, b) , смежного с μ ,

$$(TP(a) - TP(b))^2 = 0, \quad (11)$$

б) функция $TP(x)$ непрерывна в смысле нормы и имеет ограниченную операторную вариацию, т. е.

$$\sum_{k=1}^N \|T\Delta P(x_k)\| < \infty, \quad (12)$$

где $\mu_N = \{x_k\}_{k=1}^N$ — произвольное конечное разбиение множества μ , то по теореме 25.1 из (5) равенство (6) можно переписать в виде

$$(A - \omega I)^{-1} = \int_{\mu} \frac{dP(x)}{\beta(x) - \omega} \int_{\mu} \exp \left(-T \frac{dP(t)}{\alpha(t) - \omega} \right).$$

В этом случае при $T = A$, согласно (7),

$$(A - \omega I)^{-1} = -\frac{1}{\omega} \int_{\mu} \exp \left(-A \frac{dP(x)}{\alpha(x) - \omega} \right).$$

Если $T = V$, то условие (11) выполняется автоматически; в случае непрерывности функции $VP(x)$ по норме и выполнения неравенства (12) из (8) имеем

$$(A - \omega I)^{-1} = \int_{\mu} \frac{dP(x)}{\alpha(x) - \omega} \int_{\mu} \exp \left(-V \frac{dP(t)}{\alpha(t) - \omega} \right).$$

Если при этом имеет место представление (9), то равенство (10) можно переписать в виде

$$(A - \omega I)^{-1} = \int_{\mu} \frac{dP(x)}{\alpha(x) - \omega} \int_{\mu} \exp \left(-2iP(t) \frac{A_J dP(t)}{\alpha(t) - \omega} \right).$$

Целиноградский сельскохозяйственный институт

Поступило
7 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, ДАН, 175, № 2, 272 (1967). ² В. М. Бродский, М. С. Бродский, ДАН, 181, № 3, 511 (1968). ³ В. М. Бродский, ДАН, 190, № 3, 510 (1970). ⁴ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория вольтеровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, «Наука», 1967. ⁵ М. С. Бродский, Треугольные и жордановы представления линейных операторов, «Наука», 1969.